

教育部國教署 109 學年度中小學科學教育計劃專案成果冊

## 臺灣國小階段數學領域

### 分數教學與學習遊具設計及成效研究



執行單位：臺中市東區樂業國民小學

我們愛玩 也熱愛教學

我們嚐試讓這兩個看似天地之遙的元素

能無違和地融在一起

雖然我們遇到了許多問題

如同

孩子們看待數學學習的高牆

但因為在遊戲中

我們嚐試創造出樂趣

也因此

我們期待帶給孩子們數學學習的樂趣

感謝

教育部給予我們衝撞數學教材教法的機會

讓數學的課堂中

充滿了挑戰 勇氣 樂趣 與 歡笑

期待有機會

再回到這個共同研究成長的基地

再為孩子們 作更多的事

數學魔法師 蔡嘉豪、楊惠琪、吳豪杰、元珮文、張博盛

2021.07 謹幟



# 目 錄

一、源起-109 學年度計畫申請

二、反思-期中報告大綱

三、分享-期中報告簡報

四、成長-期末報告大綱

五、收獲-期末報告簡報

六、產出-桌遊規則與分數教學設計

(一) 推倒弗雷森

(二) 魔法合一術

(三) 弗雷森變身術

(四) 弗雷森聖物

七、番外篇-數學小魔法師的奇幻旅程

(一) 109 學年度臺中市科學展覽-數學組作品

(二) 109 學年度臺中市科學展覽-數學轉為生活應用組作品



## 一、源起

109 學年度計畫申請





二、反思

期中報告大綱



三、分享

期中報告簡報





四、成長

期末報告大綱



五、收獲

期末報告簡報





## 六、產出

桌遊規則與分數教學設計



## 七、番外篇

### 數學小魔法師的奇幻旅程



# 臺灣國小階段數學領域分數教學與學習遊具設計及成效研究

## 壹、核心理念

### 一、數學是一種語言，溝通時所用媒介

無論在數學領域九年一貫課程綱要中，或是在十二年國教數學素養指標裡，都很強調「數學是一種語言」的學習概念。而教育部雖然每年編列大量的經費在學習扶助（舊稱為補救教學）上，但在學生的學習成效之所以有限或成效不彰，或許與此有關。過度使用數學符號來解釋、說明或體會數學概念，似乎有些本末倒置，試想，學生對於符號的認識如果僅限在背誦及抄寫，是不是很像在學語文課時的不明其（文）義，只見其（字）形？難怪，補救教學時常見的錯誤類型，大多出現在知道如何計算，但卻不知如何列式，也就好像寫出來的都是對的字，但組合起來卻是詞不達義、文不對題，更遑論去探討解題的合理性了。

另外，由於家長、學生對於課後扶助的學習態度，也多是缺乏積極性的動機，大多家長僅期待孩子能將功課完成、能獲得高分，幾乎很少去解決孩子是否真的了解所面對的問題，以及能否擬定解題的策略，僅能關心孩子的計算正確性，殊不知，數學的重要性及趣味性，在於能以合理的方式、推論、學習，並以推理的方式得正確的答案。因此，本路究希望透過有趣的、可操作的教學活動，讓孩子可以動手做數學、動口說數學，提高孩子對數學的學習興趣，進而提升學生的學習成效。

### 二、強調操作及對話後產生數學概念，而非死記硬背算式型態

國小階段的數學學習內容在於是學習「數」、「量」、「形」，是每天在生活中都會看到、碰到、用到的。因此老師要讓學生學數學不再焦慮，對數學要有自信，如此才有可能加深孩子的數學素養。不論是強調「人、自然、社會」三位一體的課程架構，或是「自發、互動、共好的」終身學習歷程，學習，就是要不斷地對話。在數學的文化之旅，人藉著語言和他人溝通，藉著操作表徵和自己對話，所書寫下的符號算則皆是有意義的表現方式，因此，沒有操作的數學學習是虛無的，無關數學學習的操作是空泛的。

有鑑於此，臺灣刻下正在研發的奠基進教室，無非是藉由奠定數學基礎概念的教學及學習活動，引入課室的教學之中，較屬於活動式的概念學習，除了尚要克服活動與正式課程的相關性外，培養學生進行學習記錄、符號運用能力養成也還有努力的空間。

數學的訓練不單是為了考試所需，重要的是藉由數學的邏輯性訓練，讓我們不論在其它學科，甚至日後的待人處事上，都能有清晰的思考脈絡及正確的決判斷，並從其中汲取人生的智慧與養分。

因應十二年國教的需求，教師要調整傳統的教學策略與評量思維，正式看待培養孩子具有「數學素養」這件事，教師也應該改過去單打獨鬥的方式，開始學習「如何團隊合作」、「如何開放教室」，我們一定要靠團隊的力量，一個腦袋是不夠用的，結合群力

才是王道。

### 三、分數簡單又複雜，似曾相識又若即若離

在國民教育的國小階段，對於數學的學習包含、整數、分數與小數，其中分數在數系中又視為是有理數和無理數的分界，舉凡數字能在被化為分數型態的皆稱為有理數，不能化成分數型態的則成為無理數，雖然不在國小階段探討，但分數的概念是未來學生進入有理及無理數系的重要基礎，若對分數的意義不求甚解，對於學生未來在數學學習上的理解恐仍產生負面影響。

國小階段分數型態大概分為真分數、假分數和帶分數三種型態，而無論是哪種呈現方式，多是由整數放在不同位置所產生不同意義，換句話說，分數是藉由位置來表現不同分數，例如說，在分母放上4，和在分母放上8，即為不同的分數。而不同於「位值」，而以「位」來記錄量的多寡、數的大小，學童往往會在這些數的表示中有所迷思，因此，如果學童無法理解分數的「數字」、「數詞」所表徵的意義，更遑論對於數字的操作和計算有所理。無法理解的計算，就僅能學習其解題模式，進而模仿，一旦有所混淆，就可能產生更多的迷思、更多的錯誤應用，實非數學學習之福。

因此，有意義地學習分數，進而能使用分數進行計算，實有須臾，而運用探究的方式進行分數的學習更是必要可行。

## 貳、計畫方案內容與目的

本年度計畫將延續自研究群108學年度參與科教專案的研究成果，並將計畫影響層面擴大，學生對象可由低年級延伸至中、高年級，課程設計由課後扶助學生到一般生，學習時間由社團時間到領域課堂中，讓活動與學習更為相關，也將持續辦理數學科學活動、普通班、課後扶助班數學創意活動及本校數學專業團隊社群，繼續推廣與融入低年級、中年級及高年級一般及補救教學教材，說明如后：

### 一、玩的有目的：持續研討分析十二年國教數學領域分數相關素養指標教材教法

在前一年度規畫中，原欲自坊間或現有之教具發展與分數相關的教學與遊戲學習的課程，經研究群分析討論學習內容及學習表現後，因分數除了在數字的表示上需要讓學生更為熟稔才能善用，在量的觀察更是一大關鍵，而目前坊間以量的表示作為桌遊用具並不多，因此暫無搜集到結合量與分數的學習教材或遊戲用品。由於是續行研究，茲將已完成規畫的相關活動標示於後（詳細活動說明待見於108學年度科教專案期末報告）：

在十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校教學領域課程綱要中，有關學童在國小階段（第一階段~第三階段）中，與分數相關的學習表如下表（n表示主題為「數」；I表示國小1、2年級；II表示國小3、4年級；III表示國小5、6年級）：



學習階段 編碼	學習表現（依學習階段排序）	活動設計
n-I-4	理解乘法的意義，熟練十十乘法，並初步進行分裝與平分的除法活動。	<b>推倒弗雷森</b>  
n-I-6	認識單位分數。	
n-II-6	理解同分母分數的加、減、整數倍的意義、計算與應用。認識等值分數的意義，並應用於認識簡單異分母分數之比較與加減的意義。	1. 弗雷森抓鬼 2. 分數撿紅點 
n-II-8	能在數線標示整數、分數、小數並做比較與加減，理解整數、分數、小數都是數	
n-III-4	理解約分、擴分、通分的意義，並應用於異分母分數的加減。	
n-III-5	理解整數相除的分數表示的意義。	
n-III-6	理解分數乘法和除法的意義、計算與應用。	

n-III-9	理解比例關係的意義，並能據以觀察、表述、計算與解題，如比率、比例尺、速度、基準量等。	
---------	--	--

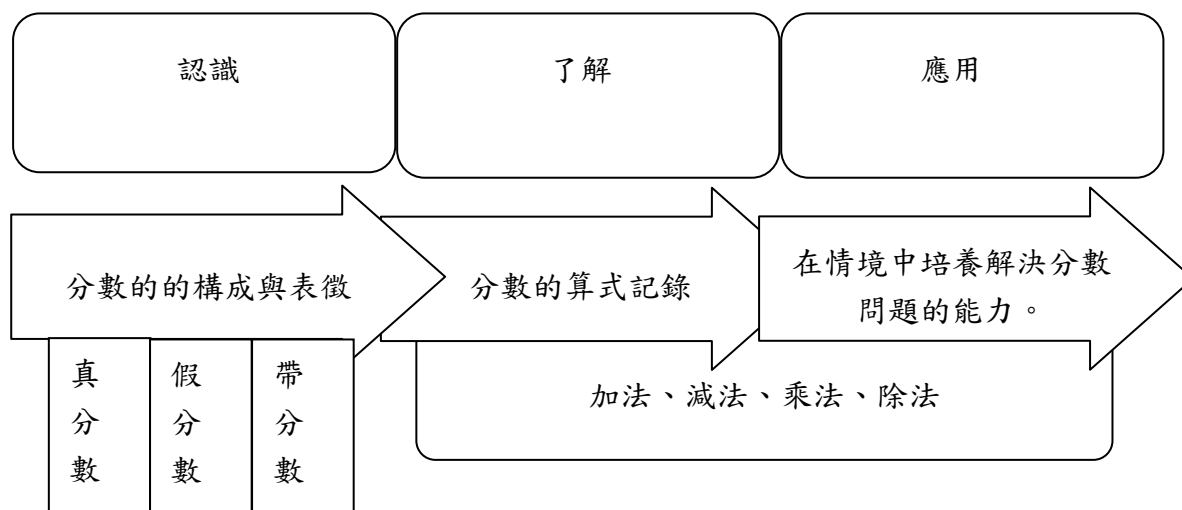
另外，當有各年級學習內容，分列如下（N表示「數」主題；編碼第二碼為年級；編碼第三碼為流水序）：

學習內容 編碼	學習內容條目及說明	對應 學習表現
N-2-9	解題：分裝與平分。以操作活動為主。除法前置經驗。理解分裝與平分之意義與方法。引導學生在解題過程，發現問題和乘法模式的關連。	n-I-4
N-2-10	單位分數的認識：從等分配的活動（如摺紙）認識單部分為全部的「幾分之一」。知道日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。在已等分割之格圖中，能說明一格為全部的「幾分之一」。	n-I-6
N-3-9	簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於1」的意義。	n-II-6
N-3-11	整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。	n-II-8
N-5-4	異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分數的加減。	n-III-4
N-5-6	整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。	n-III-5
N-5-5	分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。	n-III-6
N-5-7	分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。	



N-5-10	解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。	n-III-9
N-6-6	比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。	
N-6-7	解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。	
N-6-8	解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。	
S-6-2	解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。	

參考素養指標所訂定的學習表現與學習內容，並以認知理解層次進行教學步驟擬訂，則分部如下：



我們擬在本次的科教專案中，持續發展出以探究的方式進行分數的教學與學習，期以能建置分數學習的情境，提升學生學習的成效，增進學生面對問題的知識、能力與態度，提高學生在數學學習上的素養能力。

（一）如何設計深化分數記錄的相關教材。

（二）如何記錄分數的化聚與快速計算。

（三）如何理解分數於生活中的應用。

(四) 如何結合數學遊戲進行分數學習與練習。

## 二、有目的的玩：結合研究成果辦理團隊分享，強調數學學習趣味性

數學教育在國小教學中，是非常重要的一環，我們將於課餘、假期辦理數學分享營隊，將這二年的分數桌遊相關研究成果轉化為育樂營課程，在學生育樂營隊中，可培養下一代兒童有更多元靈活的思考力，以及增進對數學的喜愛，讓對數學有興趣的兒童，得到另一種學習的機會；對於教師而言，在分數教學與學習的規畫中，有更悅趣化與生活化的素材可以選擇，希望教師能在學生學習的課堂中，認識數學的多面性及應用性。

數學，通常是許多人最排斥的一項科目，但是數學卻也與我們生活息息相關。為了提高學員對數學的興趣，我們會把數學豐富及多彩之處和生活部分結合。靜態的課程設計將數學融入於趣味教學之中，希望能引發學生對數學的喜愛，產生教學間的互動，使數學生活化、遊戲化、趣味化。而在動態方面，運用巧思設計成不同關卡，讓學員們在闖關的過程中，體會到數學「原來這麼好玩！」，並且在無形中建立了數學的概念。

另外，經由科教專案的期中、期末研討會議，也認識了在國小推展科學育樂營的老師，期望可以透過跨領域的交流與分享，辦理數學與科學的育樂營，邀請長期推展科學教育的夥伴教師、共同辦理暑期科學樂活課程-科學育樂營。

## 三、續組「數學專業社群」—弗雷森數學魔法師

樂業國小創校七十週年以來，校風保守，教師對於創意教學、小班教學、班群運作、翻轉教學、教師專業社群、教師評鑑等等，皆不曾接觸也有較多的疑慮，因此在教學創新上的意願不高。尤其對於活化教學的方法與策略，較少研討，大多以傳統的講述式教學為主。

研究者的觀察經驗：一個害怕數學、對數學沒有熱忱的教師是無法說服學生「數學一點都不難」，也無法提高學生的學習興趣與學習動機。研究者參考99年、101年、103年及108年中小學科學教育專案的成功經驗(研究者前任教國小)，除在本校邀請課後時間較多的低年級教師群、對數學有興趣的老師、台中市國小新進教育人員，更擬邀請校外的老師以專業社群的運作模式，成立一個「數學創意教學工作坊」，並以分數研究為主。在這個工作坊，所有成員將進行下列活動：

1. 一起研討相關研究文獻。
2. 發掘學生的分數數學迷思概念。
3. 針對學生易有迷思概念的能力指標研發或選擇數學遊戲。
4. 擬訂觀察及訪談綱要。
5. 選擇研究對象。
6. 進行學生學習興趣與學習成效之前測。
7. 進行教學實驗及觀察。

8. 再進行後測及訪談。

9. 做成研究成果等過程。

這個工作坊希望透過不斷對話、討論、試教、檢討的過程，讓具數學背景的成員和不具數學背景成員一同增進對數學的學習興趣，一同了解數學，進而專注於數學教學，不放棄每個孩子，讓每個孩子在數學的學習過程中，能發展出成就感。惟邀請老師方面，執行計畫以來，仍是需要努力的地方，如何讓老師覺得參加本案計畫並非增加教師額外工作，同時感覺上沒有什麼壓迫感，也能有所收穫是我們要繼續思考。

#### **四、延續「數學high課」精神—fun手玩數學教材的繼續發展與推廣**

##### **(一)依據能力指標發展補救教學教材(由低年級擴大至中、高年級)**

本計畫將修正104學年度之研究成果，延續數學創意遊戲的設計，針對低、中年級數學補救教學學生，先檢核補救教學學生在何能力指標上有學習困難，再針對此能力指標設計數學遊戲進行教學實驗，並評估其教學成效，發展出有效的數學數學遊戲教學教材及教法。

首先，社群教師一起研討相關研究文獻、研究低、中年級補救教學學生的數學概念，並配合能力指標研發或選擇數學遊戲、設計學生學習興趣及學習成效問卷、擬訂觀察及訪談綱要、選擇研究對象，規畫創意遊戲數學活動。

教學研究實施前先對需補救教學學生學習興趣與學習成效進行前測，再進行教學實驗，最後施以學生學習興趣與學習成效之後測，以視是否提高這些低成就學生的認知能力、學習興趣與成就感。

讓學生喜歡數學的最好方法就是「接觸數學、認識數學」，本計劃目前規劃之數學課程內容以撲克牌、骨牌、幾何扣條、幾何智慧片…等學具為媒介，讓學生實際操作數學學具完成指定的任務，透過師生間的對話、溝通及教具操作，在活動過程中體驗數學的概念，建構數學理解的認知結構，並嘗試提升數學概念溝通表達的能力，也期望在教具操作遊戲中讓孩子更喜歡數學。

##### **(二)推廣「數學high課」—數fun手玩教材(由補救教學論點回歸普通班教學)**

為了深耕本研究成果，將持續邀請校內老師加入本團隊，運用 104 學年度的研究成果於教學活動中，繼續研究發展及修改數學遊戲教材，未來期望深根於中高年級。另亦規劃建構網路學習平台，供學生及教師使用。

**綜上所述，本計畫方案之主要目的有二**

- (1) 以分數為主題，持續設計活潑多元的教材，以提高國小孩子學習數學的興趣。
- (2) 探討數學的創意遊戲活動用於補救教學是否能提升學生學習興趣與學習成效，及實施困難之處與解決方法。
- (3) 發展創意遊戲教學教材教法，供教學或活動參考。

**根據上述之目的，本研究主要內容為：**

- (1) 針對學生數學迷思概念，設計數學的創意遊戲課程，包含數學遊戲結合數學基本能力與十二年國教能力指標之教材設計，學習單編製。



(2) 從補救教學延伸至一般化教學的數學學習及數學教學素材的開發。

(3) 發展創意遊戲教學教材教法。

## 參、文獻探討：

文獻探討從遊戲式的數學教學特性、遊戲式的數學教學效益、數學迷思概念的研究、提升國小學童學習興趣的教學輔導策略、遊戲式數學對學生數學興趣與學習成效之關係等分向進行探討。

### 一、 遊戲式的數學教學特性

在幼兒遊戲中，常常會涉及到數、量、形狀、時間、空間等有關數學方面的知識。因此在數學教學活動當中，可以融入許多的教具或是遊戲，讓孩子能在上課中或是日常生活中充分的學習。

鄭肇楨（1991）和饒見維（2002）認為數學本身就是遊戲，數學和遊戲是具有相類似的元素與結構的。數學遊戲的教學，就是使原本平淡無味傳統的數學教學，利用遊戲式的方式，使學生在其中吸收到數學知識，更在其中獲得樂趣。

陳杭生（1993）指出，遊戲導向教學必須從課程內容、教學方法和教具的運用三方面著手：

- (1) 將教材遊戲化：把教材重組並趣味化，讓學生願意直接參與活動，教材隱含於遊戲活動使每一位學生感覺到活動與本身有直接關聯。
- (2) 將遊戲教材化：透過遊戲，學生實際參與彼此合作的學習經驗，藉小組討論以及分組比賽等使教學在遊戲中進行學習。
- (3) 將教具玩具化：「教師手中的教具，是學生心中的玩具；學生手中的玩具，是教師手中的教具」觀念，儘可能讓學生於上課時有機會直接操作教具，而能從中獲得「有目的之直接經驗」。

歸納數學科實施遊戲教學的四個主要特性如下（饒見維，2002）：(1)、適度的挑戰性。(2)、競賽性與合作性。(3)、機遇性與趣味性。(4)、教育性。

本計畫之數學high課-數學fun手玩所實施的遊戲數學教學法，乃是把數學科的教學活動轉變成遊戲活動的教學方法；也就是教師有計劃地在所安排的遊戲活動中，提供學生學習並從中獲得數學概念性的知識。

因此本計畫之遊戲數學教學活動，強調以「生活化」、「趣味性」、「教育性」的原則將數學概念融入遊戲中。

### 二、 遊戲式數學的教學效益

遊戲是兒童的天性，從遊戲中兒童可以得到許多效果是無庸置疑的。老師如能夠充分運用兒童喜愛遊戲的天性，將學校數學課程以遊戲式方式教學，增加學童學習的能力；利用遊戲的競爭力來加強記憶；利用合作性增進學生人際溝通的技巧；利用其挑戰性來磨練面對困難的勇氣；利用其趣味性以增進其學習效果，相信許多人會因此而更喜歡學習數學（饒見維，2002）。

1、數學學習的效益：許多研究顯示，遊戲的教學方式，有助於學生建立數學的基本概念和認知（饒見維，2002；洪教通，1985）、精熟基本的運算方法與能力（饒見維，

2002；王克蒂，1999）、增進推理思考的創造力（饒見維，2002；洪教通，1985；王登傳，1982）、策略性遊戲更有助於培養學生問題解決的能力（Keller, 1990；Krulik & Rudnick, 1983；饒見維，2002；王克蒂，1999；王登傳，1982）。

2、數學態度的效益：增加數學正向的學習態度（Haynes, 1999；Keller, 1990；Marty, 1985；Hollis & Felder, 1982）、提昇數學的學習興趣與動機（饒見維，2002；黃毅英，1997）。

3、數學教學的效益：提高教師的教學品質（林嘉玲，2000；黃毅英，1997）；此外。

然而國內外學者也指出，僅靠遊戲不足以完成學習，必須加上教師的引導及適當的課程安排，讓學生有機會進行策略討論與統整，且教學用的遊戲必須要有明確的認知與情意之目的，以數學遊戲而言則要有特定的數學主題。

因此本計畫所實施之數學high課所設計的遊戲式數學創意活動，配合二年級學童的數學課程，以遊戲的建構觀點讓學童直接操弄教具（學具），學生藉由視覺、聽覺、觸覺、動覺等多重感官直接經驗而來。以社會互動觀點將學童座位分組，以個別競爭、小組競爭、小組合作。以學習情境的觀點設計活潑好玩的遊戲，引發學童想玩的心態，有趣的活動情境。

### 三、提高學生學習興趣的教學輔導策略

根據學者研究指出，在國民中、小學階段大約有6%的學童在數學學習上具有障礙產生，而且比率會隨著年級增加（陳麗玲，1993；邱上真等，1992；邵淑華，1997），這些學生在學習過程中，由於累積太多的失敗經驗，因此有許多負向的自我語言與思考模式（秦麗花，1995），對學生的自我態度及往後的學習產生不良的影響。

（一）**提升數學學習興趣與動機**（孟瑛如，1999）：1、運用遊戲化或生活化的情境使學生能有運用自己能力解決問題的機會。2、讓學生有成功的學習經驗，學生才能持續學習動機。3、讓學生瞭解數學的生活價值，能在生活中發揮功能，而所謂生活數學，通常亦較能引起學生興趣。4、適時的回饋，在教學過程的適時提示，例如：學生寫數學日記，作業的批改，教學的評量等，皆能持續學生的學習興趣和動機。

（二）**提升數學學習的效果**：學者們（孟瑛如，1999；劉秋木，1996；Polloway & Patton, 1997）指出欲提昇學生數學學習的效果，在教導數學的過程中，應注意下列的一般性原則：（1）、**生活化的教學活動**：以生活問題為材料才能激發學生學習的興趣，經由生活問題的解決發現數學的概念，熟悉之後便能自然地將數學概念應用於日常生活中。學習與生活互有關聯的情況下，學生較易產生濃厚的興趣。（2）、**由具體→半具體→抽象概念的教學流程**：抽象概念的學習應由觀察與操作具體事物開始，教學順序應為具體→半具體→抽象學習經驗，同時呈現的教材應與學生的先前知識相配合。（3）、**重視解決問題之心智歷程學習**：學生學習數學是希望能在解決問題的過程中，主動運用各種心理歷程，數學應是在啟發學生的心智，進而使其具備有解決問題的能力。

### 四、遊戲式數學對學生數學興趣與學習成效之關係：

有研究（田興蓉，2003；宋雲卿，2006）指出大部分的學生對數學遊戲的評價很高，能充份引起學生學習數學的動機，但是卻不一定能提升學生的學習成效，她認為僅是快

樂的學習而無脈絡化及引導數學概念的建構是無法提升學生的學習成效的。再者，她亦認為數學遊戲有具有補救教學的功能，因有些數學遊戲係從生活情境中引入數學概念，這些數學常識可以作為複習國小所學過的數學概念，對於補救教學的辦理是很有助益的。

蘇振毅（2007）研究指出遊戲式補救教學對於中低程度學童的數學成就有顯著提升，且其提升的程度顯著優於傳統式補救教學。另外對於中低程度學童的數學態度的提升亦是如此，因此其建議使用數學遊戲於補救教學具有價值，可以多加利用。

賴淑惠（2008）針對國中學生數學態度的研究結果指出，實施合作式的數學遊戲學習數學能顯著提升學生的數學學習興趣，學生上課時會較不想睡覺，減少和同學聊些與數學無關的事情，也不會覺得學數學是在浪費時間，而且能更專心的聽老師講解，同時可以自己的數學迷失概念在哪裡。同時合作式數學遊戲教學也對補救教學的學生非常有幫助，可以提供學生有趣的複習經驗，讓學生有澄清經驗的機會，而不會覺得無聊，有很好的補救效果。

由以上研究可知遊戲式數學可以提升學生的數學學習興趣，但在學習成效方面則要看老師如何引導，若僅是強調快樂的學習，則學習成效並不高，老師於教學中的教學引導是決定性的關鍵。

#### **肆、研究方法及步驟：**

一、**文獻閱讀：**由主持人帶領參與研究教師一起閱讀遊戲式數學教材及低成就學生的學習策略、迷思概念相關文獻，作為設計數學遊戲活動之參考。

二、**「數學專業社群」的成立：**邀請有興趣參與的教師，以專業社群的運作模式，成立一個「數學創意教學工作坊」。所有成員將一起研討相關研究文獻、發掘學生的數學迷思概念、針對學生易有迷思概念的單元研發或選擇數學遊戲、設計學生學習興趣及學習成效問卷、擬訂觀察及訪談綱要、選擇研究對象、進行學生學習興趣與學習成效之前測、進行教學實驗及觀察、再進行後測及訪談、做成研究成果等過程，透過不斷對話、討論、試教、檢討的過程，讓具數學背景的成員和不具數學背景成員一同增進對數學的學習興趣，一同了解數學，進而專注於數學教學，不放棄每個孩子，讓每個孩子在數學的學習過程中，能發展出成就感。

三、**學生數學概念的調查：**編擬數學概念調查表，請補救教學學生數學任課老師填寫學生數學迷思概念，作為設計課程依據。

#### **四、數學遊戲課程設計、教材編製與撰寫：**

本研究計畫期望針對補救教學學生進行數學遊戲課程設計及教學實驗，除提升其學習興趣，並希望能建立其正確的概念，且在遊戲過程中引導學生解題，協助學生提高學習表現。

五、**辦理暑期數學育樂營：**為增進學生學生學習數學興趣，豐富假期生活，培養各方面學習能力，促進互助合作的群性，以達成五育均衡發展的目標，於暑假期間辦理一個月的數學育樂營。

#### **六、學生數學興趣與學習成效分析：**

（一）**數學興趣問卷：**針對低年級學生實施遊戲式數學教學後，進行數學興趣問卷調查表，包含：



- 1、我覺得學數學是一件有趣的事（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。
- 2、我喜歡和同學一起學數學（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。
- 3、我對自己今天的數學表現很滿意（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。
- 4、我喜歡今天的數學課（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。
- 5、我喜歡老師今天的數學教學（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。
- 6、我認真填寫今天的學習單（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。
- 7、我喜歡回答今天數學課的問題（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。

藉此於實驗活動進行前測，再於實驗結束後進行後測，以了解學生對數學遊戲活動的興趣反應，並以前後測結果進行 T 檢定，以了解學生數學興趣是否因數學遊戲而提升。

**（二）學習態度分析：**除了興趣調查表外，本計劃由協同教師針對學生的學習態度進行觀察，觀察的內容包含：

- 1、能專心凝聽教師的指令。（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。
- 2、能動手操作教具，完成學習單（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。
- 3、能仔細凝聽或欣賞他人的作品（非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意）。

藉此於實驗活動進行前測觀察，再於實驗進行中進行觀察，以了解學生在數學遊戲活動中是否積極參與，評量學生當節課的學習成效，並以各次前後測結果進行 T 檢定，以了解學生學習態度情形。

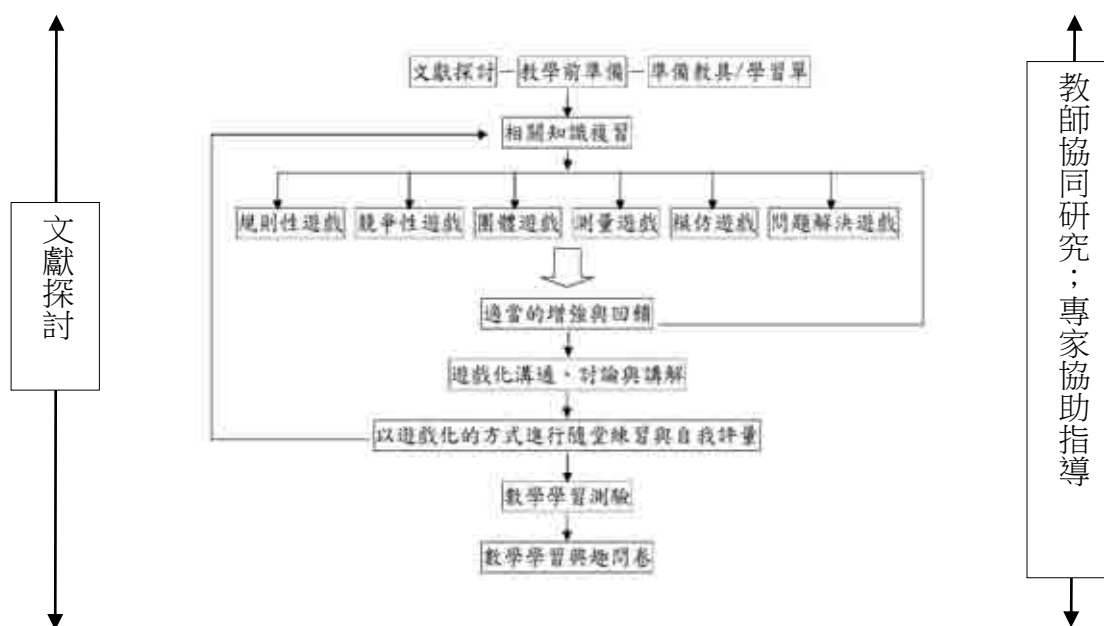
**（三）學習成效分析：**結合教學及遊戲目標，自製學習前測、學習後測以及 Pagamo (<https://www.pagamo.org/>) 網站的使用，長期觀察學生解題正確率，分析學習成效。。

**（四）訪談及個案分析討論：**本計畫擬針對：

1. 對學生就學習興趣及學習態度分析，設計半結構式訪談，以了解學生對學習數學的想法與感受。
2. 一或二名特殊學生進行初步之個案觀察研究及訪談，以便瞭解特殊學生參與數學遊戲課程的情形，以為日後研究之討論與參考。

## 伍、實施方式說明

### 一、遊戲式數學教學活動設計步驟（如下圖 1）



### 二、遊戲式數學教學流程（如下圖 2）



### 三、本計畫「數學 High 課」實施方式

#### （一）、「數學專業社群」的成立：

邀請有興趣參與教師群，以專業社群的運作模式方式，成立一個「數學創意教學工作坊」。

在這個工作坊，所有成員將一起研討相關研究文獻、發掘學生的數學迷思概念、針對學生易有迷思概念的單元研發或選擇數學遊戲、設計學生學習興趣及學習成效問卷、擬訂觀察及訪談綱要、選擇研究對象、進行學生學習興趣與學習成效之前測、進行教學實驗及觀察、再進行後測及訪談、做成研究成果等過程，透過不斷對話、討論、試教、

檢討的過程，讓具數學背景的成員和不具數學背景成員一同增進對數學的學習興趣，一同了解數學，進而專注於數學教學，不放棄每個孩子，讓每個孩子在數學的學習過程中，能發展出成就感。

## (二)、「數學 high 課」－普通班與補救教學班的創意遊戲課

### 1、普通班的數學創意遊戲課

- (1)、設計規劃低、中、高年級合計 15 次的創意遊戲課程，每次 1 節課，每節 40 分鐘。
- (2)、實施數學興趣問卷調查(學習興趣量表)。
- (3)、實施數學學習態度觀察(學習投入行為觀察統計表)，配合數學專業社群教師的公開課與入班觀察。
- (4)、教學實施後的反省觀察與修正。

### 2、補救教學班的數學創意遊戲課

- (1)、本計畫將修正 105 學年度之研究成果，延續低年級數學創意遊戲的設計。
- (2)、針對能力指標往上發展中年級補救教學的創意數學遊戲課。
- (3)、撰寫教學日誌，修正與發展遊戲設計。評估其教學成效，發展出有效的數學數學遊戲教學教材及教法。
- (4)、相關成果彙編與推展。

### 柒、推展時程表

109 學年度 行動策略	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	備註
1 數學創意遊戲、相關文獻等資料之收集													
2 成立教學團隊													
3 設計遊戲式創意數學活動													
4 舉辦數學 High 課													
5 評量與反省													
6 觀察紀錄、文件分析、反省日誌與深入訪談													
7 交叉檢核與分析資料													
8 完成計畫成果報告													
預定進度累計百分比.	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	100	



## 捌、文獻參考

### 中文參考文獻：

王克蒂(1999)。數學遊戲教學之效益研究—以國小四年級學生為例。國立台灣師範大學科學教育研究所碩士論文(未出版)。

王登傳(1982)。用遊戲來學數學。高雄：前程。

林嘉玲(2000)。數學遊戲融入建構教學之協同行動研究。國立花蓮師範學院國小科學教育研究所碩士論文(未出版)。

孟瑛如(1999)。資源教室方案。台北：五南。

邱上真、王惠川、朱婉艷、沈明錦(1992):國小中年級解題歷程導向之評量。特殊教育與復健學報，4，75-1。

邵淑華(1997)。直接教學法在國小數學資源班補救教學之成效研究。國立台灣師範大學特殊教育學系碩士論文(未出版)。

洪教通(1985)：兒童遊戲數學，第十一冊。臺北：高思。

秦麗花(1995)。國小學障兒童數學解題錯誤類型分析。特殊教育季刊，55，33-38頁。

陳麗玲(1993)。國小數學學習障礙學生計算錯誤類型分析研究。彰化大學特殊教育研究所碩士論文(未出版)。

黃毅英(1997)：邁向大眾數學的數學教育。臺北市：九章出版社。

鄭肇禎(1981)：智慧遊戲(又名：數學遊戲)。香港：商務印書館。

劉秋木(1996)。國小數學科教學研究。台北市：五南圖書出版公司。

鄭麗玉(1998)。如何改變學生的迷思概念。教師之友，39(5)，28-36。

饒見維(2002)。國小數學遊戲教學法。臺北：五南。

賴淑惠(2008)。合作式數學遊戲融入國中數學教學對學生學習態度影響之研究。國立臺灣教育大學教育學系碩士論文。

蘇振毅(2007)。透過數學遊戲教學進行國小三年級乘法單元之補救教學研究。國立臺南大學數學教育系學科教學碩士班碩士論文。

田興蓉(2003)。數學遊戲對國一學生學習動機影響之研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文。

宋雲卿(2007)。數學遊戲活動對國中學生數學學習態度的影響。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文。

### 英文參考文獻：

Haynes, L. C. (1999). Gender differences in the use of a computer-based mathematics games: Strategies, and beliefs about mathematics and computers. University of South Alabama Doctoral Dissertation Abstract.

- Hollis, L. Y. and Felder, B. D. (1982). Recreational Mathematics For Young Children. **School Science and Mathematics**, 82, 71-75.
- Keller, J.J.(1990). Strategy Games: **Developing Positive Attitudes and Perseverance toward Problem Solving with Fourth Graders**, Jan., Master' s Practicum Report, Nova University.
- Krulik, S. & Rudnick, J.A.(1983).Strategy game and problem solving-an instructional pair whose time has come! . **The Arithmetic Teacher**, 83(12), p26-28.
- Marty, J. F. (1985) . **Selected effects of a Computer Game ON Achievement , Attitude , and Graphing Ability in Secondary School Algebra** (Mathematics , Cai , Computer-Assisted Instruction , Microcomputers , Educational Technology) , Oregon State University Doctoral Dissertation Abstract.

# 教育部109年度中小學科學教育計畫專案

## 期中報告大綱

計畫編號：4-4

計畫名稱：臺灣國小階段數學領域分數教學與學習遊具設計及成效研究

主持人：蔡嘉豪

執行單位：臺中市東區樂業國民小學

### 壹、計畫目的及內容：

#### 一、計畫目的

1. 以分數為主題，持續設計活潑多元的教材，以提高國小孩子學習數學的興趣。
2. 探討數學的創意遊戲活動用於補救教學是否能提升學生學習興趣與學習成效，及實施困難之處與解決方法。
3. 發展創意遊戲教學教材教法，供教學或活動參考。

#### 二、主要內容為：

1. 針對學生數學迷思概念，設計數學的創意遊戲課程，包含數學遊戲結合數學基本能力與十二年國教能力指標之教材設計，學習單編製。
2. 從補救教學延伸至一般化教學的數學學習及數學教學素材的開發。
3. 發展創意遊戲教學教材教法。

### 貳、研究方法及步驟：

#### 一、文獻閱讀：

1. 桌遊設計原理。
2. 桌遊融入教學設計。
3. 國小學童分數概念發展。
4. 悅趣化學習成效、態度或素養量表設計。

#### 二、「數學專業社群」的成立：玩數家族（暫訂）

1. 設置線上溝通平台，成立 Line 訊息群組
2. 運用雲端文件編輯，共同編審教案測驗
3. 桌遊設計社群分組，活動遊具分組設計
4. 教案試教測驗施測，活動實作定期研討（約每月至少一次）
5. 合作學校各自規畫，分派人員入班教學
6. 入班之前教學共備，現場觀課議課回饋

#### 三、學生數學概念的調查：

#### 四、數學遊戲課程設計、教材編製與撰寫：



五、辦理暑期數學育樂營：

六、學生數學興趣與學習成效分析

1. 數學興趣問卷
2. 學習態度分析
3. 學習成效分析
4. 訪談及個案分析討論

參、目前研究成果：

一、延伸與擴展

1. 臺中市國教輔導團員到校共備課程



2. 至教師專業成長團體「夢的N次方」-國小數學B組分享108學年度研究成果



二、修正與改善

1. 「推倒弗雷森」桌遊用具是由3D 列印機印製而成，每組所需使用的材料、用具頗多，製作耗時，且固體物件收納不易，因此需委外設計及並協助輸出。
2. 專案申請資料過於老舊，因原多是自悅趣化教學學習、桌遊融入學習而得相關文獻，於製作學習型桌遊的文獻較少，因此採補充相關文獻探討，讓專案研究更與時俱進。
3. 依據審查意見，專案只見研發而少研究，因此需修改學習成效評估試題及態度量表調查及訪談資料分析，落實科學教育研究的目的。
4. 依據108學年度期末報告審查意見，因數學具邏輯性、可推論性，若僅是就部份單位分數的體驗與學習就稱學生具有學習成效，論證力薄弱，因此應讓數學概念的學習具有延伸及擴展性為佳。



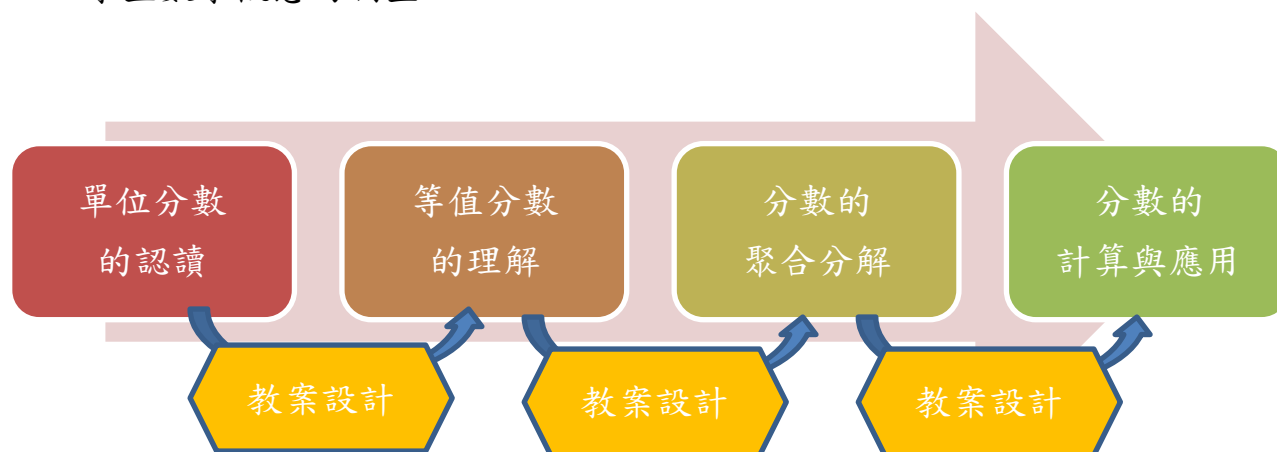
肆、目前完成進度：40%

一、文獻閱讀、分析與探討。

二、跨校數學專業發展社群-「玩數家族」成立（依年資列序）

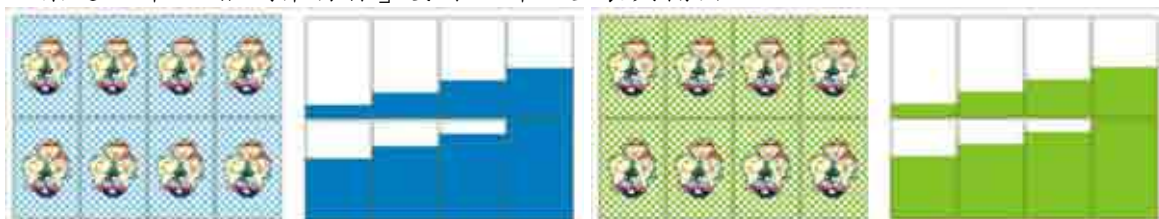
項次	姓名	學歷	科系	服務單位	年資
1	魏麗枝	碩士	臺中教育大學教育所	台中-永春	36
2	王士信	碩士	暨南大學教育行政所	台中-東光	22
3	蔡嘉豪	碩士	臺中教育大學數學教育	台中-樂業	19
4	楊惠琪	碩士	東海大學哲學系	台中-樂業	19
5	李香慧	碩士	中教大特殊教育與輔助科技研究所	台中-樂業	19
6	劉懿瑩	碩士	臺中教育大學教育所	台中-陳平	16
7	蕭弘卿	碩士	臺中教育大學數學教育學系	台中-竹林	16
8	張博盛	學士	臺中教育大學數學教育學系	台北-建安	2
9	吳豪杰	碩士	屏東大學中國語文學系	台中-富春	1
10	元颯文	學士	中興大學森林學系林學組	台中-富春	1

三、學生數學概念的調查。



四、數學遊戲課程設計、教材編製與撰寫。

1. 桌遊設計-「推倒弗雷森」委外設計、重製與輸出



## 2. 桌遊設計-「弗雷森魔法師」開發設計

參考「睡皇后」一款桌遊，製作魔法弗雷森第二彈桌遊-「弗雷森魔法師」。



### 3. 教案設計-單位分數的認識與聽、說、讀。

玩戲聚樂營法師雷轟 執筆活動設計

學區 / 科目	1. 數學 / 學區	周 / 月 / 年	以數學學區為準
實施學段	第一、二學段 / 第三、四學段	學期數	共(1)期 / (4)學期
單元名稱	分數		
教學日期	110年07月13日	教學時數	32:00分 (32)節
高年級組			
學習重點	學習 成果	<p>11-1-2 認識分數的意義</p> <p>11-1-3 理解同分母分數的加、減(整數倍)的意義,計算的應用,說明異分母分數的意義,並應用非認識簡單異分母分數之比較與加減的意義</p> <p>11-11-2 理解百分、十分、確切的意義,並應用異分母分數的比較</p>	
	學習 內容	<p>11-1-2 理解分數的意義(以平均分的活動(如折紙)認識簡單異分母分數的「幾分之幾」和「幾分之幾」與「幾分之幾」的意義,以「17的百分之二」的溝通意義,亦包含分別在折疊、切割、或測量的過程中的「幾分之幾」)</p> <p>11-1-3 簡單同分母分數之加減以活動與數線為軸,簡單同分母分數之比較,如,說明意義,表示之分數與直線數線上相連連了,以異分母分數之數線為基礎,說明異分母之比較,如,如,知道「和等於」的意義,以不同單位分數,由折疊和數線不是分數的意義,簡單異分母分數的比較,如,說明意義,簡單分數與分數的加法。</p>	

[illegible]

五、辦理暑期數學育樂營改於課間及假日方式辦理。

1. 如依專案通過審核、核定及期末報告時間安排，若以本案研究的目的，常未得及於暑假期間實施教學設計、取得回饋及成效資料，因此有修正活動時間安排的必要性。
2. 本專案經社群成員討論，擬聚焦於：
  - (1) 悅趣化數學學習的理念，進行數學桌遊的開發設計。
  - (2) 為使桌遊融入數學課堂之中，擬進行桌遊數學教學課程模組規畫，期能讓模組進入正式課堂之用。
  - (3) 期能由較無壓力的遊戲情境，提昇學生數學學習興趣與學習成效。
  - (4) 在課程開發的過程，或活動共備的過程中，藉由活動引導的流程，提昇教師數學教學知能，讓教師和學生一起玩數學。

綜上，規畫有置入課間的活動安排，及可於假日實施的育樂營活動，作為課程的進行方式，時間安排如下表。



### 3. 半日（置入課程）安排：

時間	課程	備註
08:20-08:30	活動前測	數學概念前測
08:40-09:20	主題桌遊教學	規則說明
09:30-10:10	主題桌遊教學	桌遊進行
10:30-11:10	桌遊討論（教學）	獲勝策略討論
11:20-12:00	桌遊競賽及概念測驗	競賽活動及後測

### 4. 一日（假日育樂營）安排：

時間	課程	備註
08:20-08:30	活動前測	數學概念前測
08:40-09:20	主題桌遊教學	規則說明
09:30-10:10	主題桌遊教學	桌遊進行
10:30-11:10	桌遊討論（教學）	獲勝策略討論
11:20-12:00	桌遊競賽及概念測驗	競賽活動及後測
12:00-13:20	午休	
13:30-14:10	進階主題桌遊教學	規則說明、桌遊進行
14:20-15:00	桌遊討論（教學）	獲勝策略討論
15:10-15:50	進階桌遊競賽及概念測驗	競賽活動及後測

## 六、學生數學興趣與學習成效分析

### 1. 教案設計-單位分數概念前測與後測設計

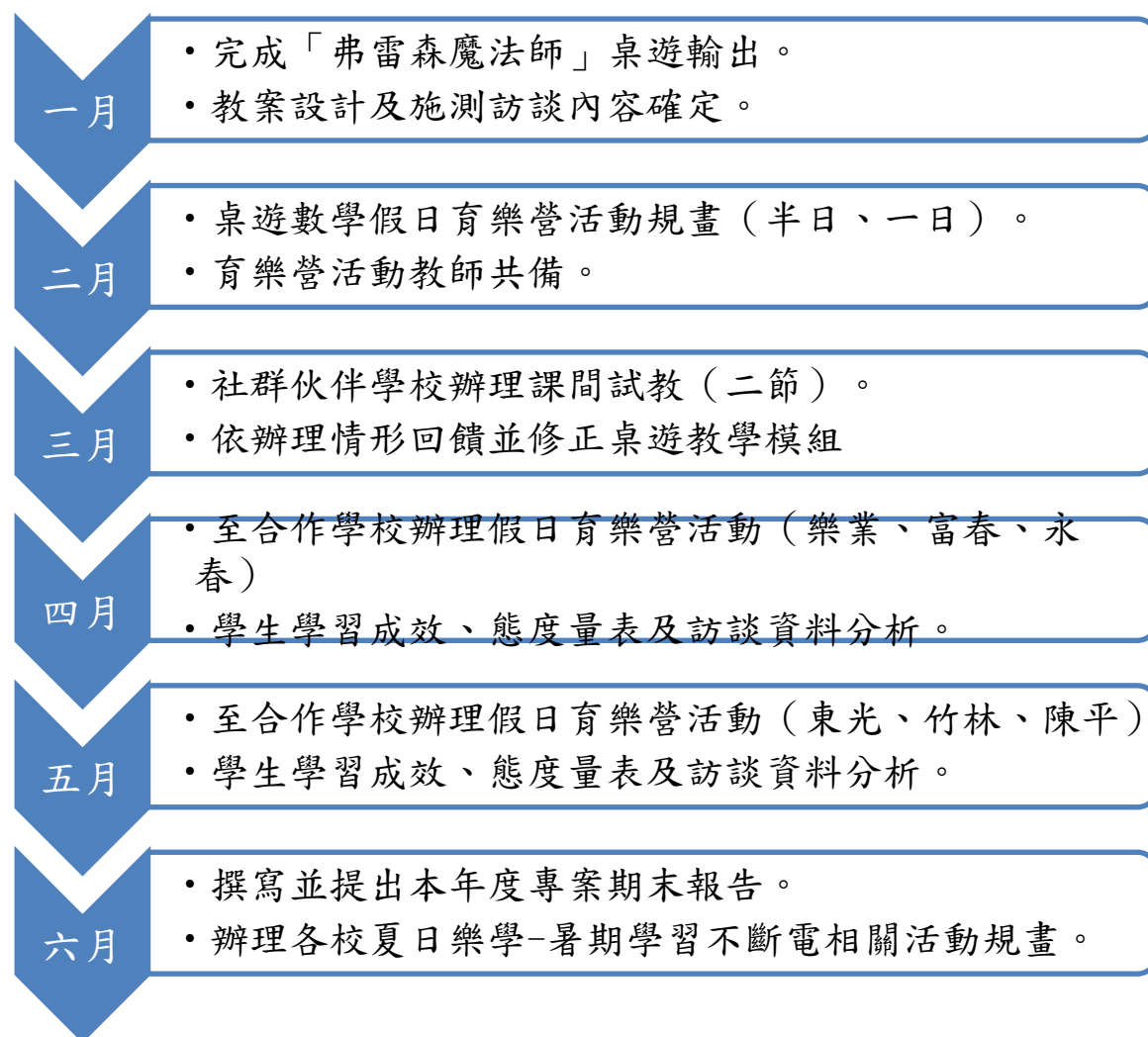


### 2. 態度量表-課程後的問題訪談及評估方法

我對數學有興趣嗎？	是	否
我對數學有信心嗎？	是	否
我對數學有耐心嗎？	是	否
我對數學有毅力嗎？	是	否
我對數學有恒心嗎？	是	否
我對數學有毅力嗎？	是	否
我對數學有恒心嗎？	是	否
我對數學有毅力嗎？	是	否
我對數學有恒心嗎？	是	否
我對數學有毅力嗎？	是	否
我對數學有恒心嗎？	是	否

我對數學有興趣嗎？				
我對數學有信心嗎？				
我對數學有耐心嗎？				
我對數學有毅力嗎？				
我對數學有恒心嗎？				
我對數學有毅力嗎？				
我對數學有恒心嗎？				
我對數學有毅力嗎？				
我對數學有恒心嗎？				
我對數學有毅力嗎？				
我對數學有恒心嗎？				

## 伍、預定完成進度



## 陸、討論與建議(含遭遇之困難與解決方法)

- 一、教具、桌遊器材的設計及輸出頗有難度，大量生產更有時間上的壓力。
- 二、學習成效的佐證、態度量表的採用及訪談所需的時間，都有其難度。
- 三、跨校社群成員進行線上討論和實體會議的成效還是有顯著差異。
- 四、器材仍需集中在同一間學校，方便管理及借用，但仍有運送上的困難。

## 柒、參考資料

Fengfeng Ke, Barbara Grabowski(2007). Gameplaying for maths learning: cooperative or not?  
*British Journal of Educational Technology*, 38(2), 249-259.

侯采伶（2016）。用桌遊來翻轉學習-以國中數學質數為例。*臺灣教育評論月刊*，5(5)，132-137。

李宜矯、林俊彥（2019）。桌遊融入數學教學之行動研究。*臺灣教育評論月刊*，8(6)，98-104。



## 臺灣國小階段數學領域分數教學與 學習遊具設計及成效研究

教育部109年度中小學科學教育計畫專案期中報告@彰化師範大學  
蔡嘉豪、楊惠琪、吳豪杰、張博盛、元嫻文 110.01.09

很久很久以前

► 其實也就是109年8月交完期末報告以後啦~



## 後來，後來

八月

- 邀請臺中市國教輔導團數學領域輔導員到校分享
- （友情來相聚，談錢就傷感情了！）

九月

- 接受肯定，到臺中市教師成長研習-夢的N次方進行成果發表
- 不管數學好不好，老師也能玩得很盡興

十月

- 計畫審查獲得通過，核定補助
- 著手修正桌遊設計（期間也到雲林僑美國小進行分享）

十一月

- 開會、討論
- 尋求合作（實驗）對象

十二月

- 修正與創意發想
- 尋求資源，落實創意

## 真的好玩，但...教具「難產」

- ▶ 3D列印，印製耗時，良率不高
- ▶ 自製卡片，紙質裁切狀況不佳





## 真的好玩，但，學習成效？

- ▶ 學習還是需要引導
- ▶ 設計有效的測驗與評量方式



## 真的好玩，但，學習成效？

- ▶ 學習還是需要引導
- ▶ 設計有效的測驗與評量方式

學習主題	學習目標	學習內容	學習評量
分數的加減法	1. 理解分數加減法的意義 2. 掌握分數加減法的計算方法 3. 能解決生活中的分數加減問題	1. 分數加減法的意義 2. 分數加減法的計算方法 3. 生活中的分數加減問題	1. 口頭問答 2. 書面測驗 3. 生活情境應用
分數的計算與應用	1. 理解分數計算與應用的意義 2. 掌握分數計算與應用的方法 3. 能解決生活中的分數計算與應用問題	1. 分數計算與應用的意義 2. 分數計算與應用的方法 3. 生活中的分數計算與應用問題	1. 口頭問答 2. 書面測驗 3. 生活情境應用

## 真的好玩，但，學習成效？

- ▶ 學習還是需要引導
- ▶ 設計有效的測驗與評量方式



## 還需要更多的-伙伴

項次	姓名	學歷	科系	服務單位	年資
1	魏麗枝	碩士	臺中教育大學教育所	台中-永春	36
2	王士信	碩士	暨南大學教育行政所	台中-東光	22
3	蔡嘉豪	碩士	臺中教育大學數學教育	台中-樂業	19
4	楊惠琪	碩士	東海大學哲學系	台中-樂業	19
5	李香慧	碩士	中教大特殊教育與輔助科技研究所	台中-樂業	19
6	劉銘瑩	碩士	臺中教育大學教育所	台中-陳平	16
7	蕭弘卿	碩士	臺中教育大學數學教育學系	台中-竹林	16
8	張博盛	學士	臺中教育大學數學教育學系	台北-建安	2
9	吳豪杰	碩士	屏東大學中國語文學系	台中-富春	1
10	元綱文	學士	中興大學森林學系林學組	台中-富春	1

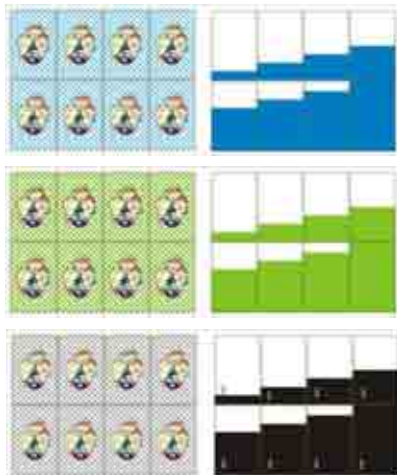
## 還需要更多的-創意

- 推倒弗雷森進階版（等值分數的第一類接觸）



## 還需要更多的-創意

- 魔法弗雷森-「魔法合一數」練習生

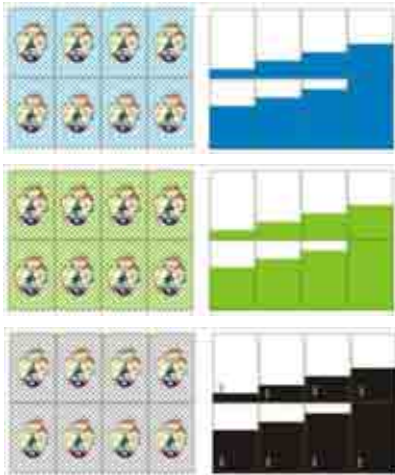


遊戲規則大致說明：

1. 將二張卡片顏色可以積滿一張卡片的，即可收回，累積自己的分數（score）。
2. 藍色卡片每張2分、綠色卡片每張2分，黑色卡片每張1分。
3. 二張同顏色可以積滿一張卡片的，合計可得5分。
4. 練習生階段可使用牌卡套驗證答案是否正確。

## 還需要更多的-創意

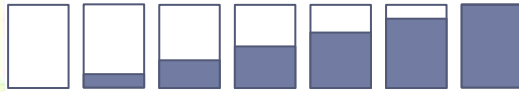
### ▶ 魔法弗雷森-「魔法合一數」魔法師



遊戲規則大致說明：

1. 大致規則和前一階段（練習生）相同。

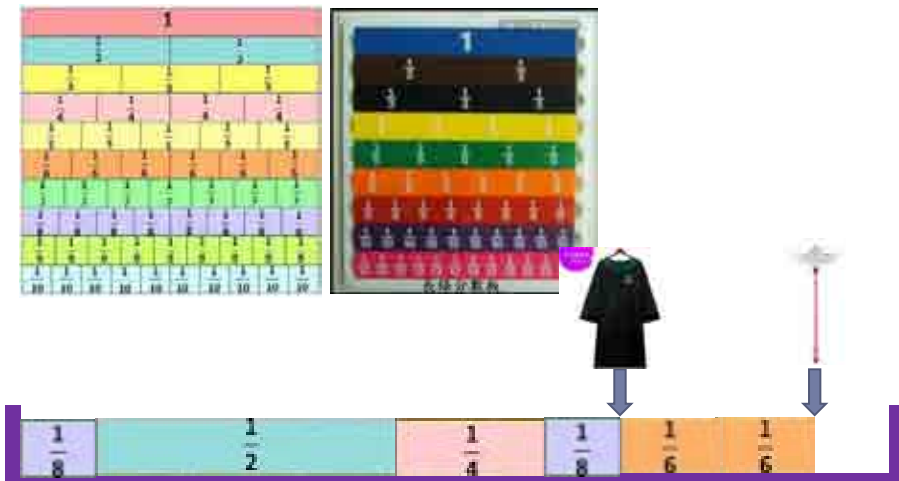
2. 加入0/6、1/6、2/6、3/6、4/6、5/6、6/6



3. 魔法師階段不可使用牌卡套驗證答案，但當其他魔法師提出對答案的質疑時，可以藉由牌卡套驗證。質疑正確，則卡片歸提出質疑的魔法師所有；質疑錯誤，該魔法師分數+2。

## 還需要更多的-創意

### ▶ 魔法弗雷森-魔法師養成（參考狂牛衝浪）





## 還需要更多的-創意

### ▶ 魔法弗雷森-沉睡的聖物（參考睡皇后）



1. 使用牌卡，喚醒沉睡中的魔法師聖物。
2. 每張聖物卡片的積分不同。
3. 喚醒聖物需要正確的咒語。
4. 可以用咒語卡強奪、或讓別人的聖物再度沉睡。
5. 功能卡可以抵禦攻擊。
6. 分數累積到一定就可以勝出。

數學概念：分數的加減與等值。

## 還需要更多的-創意

### ▶ 魔法弗雷森-弗雷森大戰（參考三國殺）

1. 選擇角色卡，擔任對應魔法師。
2. 每位魔法師具備不同特性。
3. 加、減、乘、除。
4. 累積至指定數字可獲得武器、防具、魔法藥水。
5. 將對方的能量減扣至零即可勝出。
6. 可以加入聯盟合作的遊戲規則。

數學概念：分數計算的綜合應用。



## 期中報告後的玩數家族~~

一月

- 完成「弗雷森魔法師」桌遊輸出。
- 教案設計及施測訪談內容確定。

二月

- 桌遊數學假日育樂營活動規畫（半日、一日）。
- 育樂營活動教師共備。

三月

- 社群伙伴學校辦理課間試教（二節）。
- 依辦理情形回饋並修正桌遊教學模組

四月

- 至合作學校辦理假日育樂營活動（樂業、富春、永春）
- 學生學習成效、態度量表及訪談資料分析。

五月

- 至合作學校辦理假日育樂營活動（東光、竹林、陳平）
- 學生學習成效、態度量表及訪談資料分析。

六月

- 撰寫並提出本年度專案期末報告。
- 辦理各校夏日樂學-暑期學習不斷電相關活動規畫。

讓孩子覺得數學好好玩，讓學生好好玩數學



報告結束 敬祈指教



# 教育部 109 年度中小學科學教育計畫專案

## 期末報告大綱

計畫編號：4-4

計畫名稱：臺灣國小階段數學領域分數教學與學習遊具設計及成效研究

主持人：蔡嘉豪

執行單位：臺中市東區樂業國小

### 壹、計畫目的及內容：

#### （一）目的：

1. 以玩桌遊為主題進行學習，學生從反覆遊戲中精熟學習。
2. 鼓勵教師嚐試將桌遊融入教學規畫設計，從中達成預設教學設計。
3. 遊戲進行不分上課下課時間，讓玩桌遊與學習並存，延續學習期間。
4. 遊戲可以是評量參考，在遊戲評量間擁有更習以為常的概念養成機會。
5. 桌遊延伸不同領域與不同單元，整統思考能力，亦可建立學習社群。
6. 數學領域分數概念形成不易且易生迷思，反覆練習養成概念精熟。

#### （二）內容：

研究群持續 108 年度研究成果，主要結合十二年國教數學領域課程綱要，並收集、歸納及設計「分數」概念教具應用、奠基模組及數學遊戲，並經由線上檢系統的方式檢驗學習成效，期能發展出可融入課堂教學的分數學習素材。因此，此次計畫目的如下：

1. 運用 108 年度科教專案既有設計，加入精緻化設計元素。
2. 在數學教學規畫中融入既有分數桌遊設計，形成數學分數教學模組。
3. 與現場教師討論，將數學桌遊融入教師教學活動。
4. 延續既有設計，創作更多元深入分數概念桌上遊戲。

### 貳、研究方法及步驟：

- （一）分析十二年國民教育數學課程綱要內容，並蒐集與該綱要相關之奠基活動與教具應用。
- （二）收集與「分數」概念相關之坊間桌遊。
- （三）分析桌遊與分數學習概念間的連結（桌遊與學習間的關係）。

(四) 將桌遊融入分數學習課程中的教學設計。

(五) 編擬遊戲學習成效及興趣量表問卷。

(六) 實際融入教學課堂中並進行教學實驗。

#### 參、目前研究成果：

(一) 首套數學桌遊用品-「分數卡」精緻化。

(二) 首套數學桌遊融入數學單位分數教學模組化。

(三) 與現場教師進行數學桌遊融入數學教學探討與應用。

(四) 單位分數聚合、簡單等值分數、單位分數加減桌遊設計。

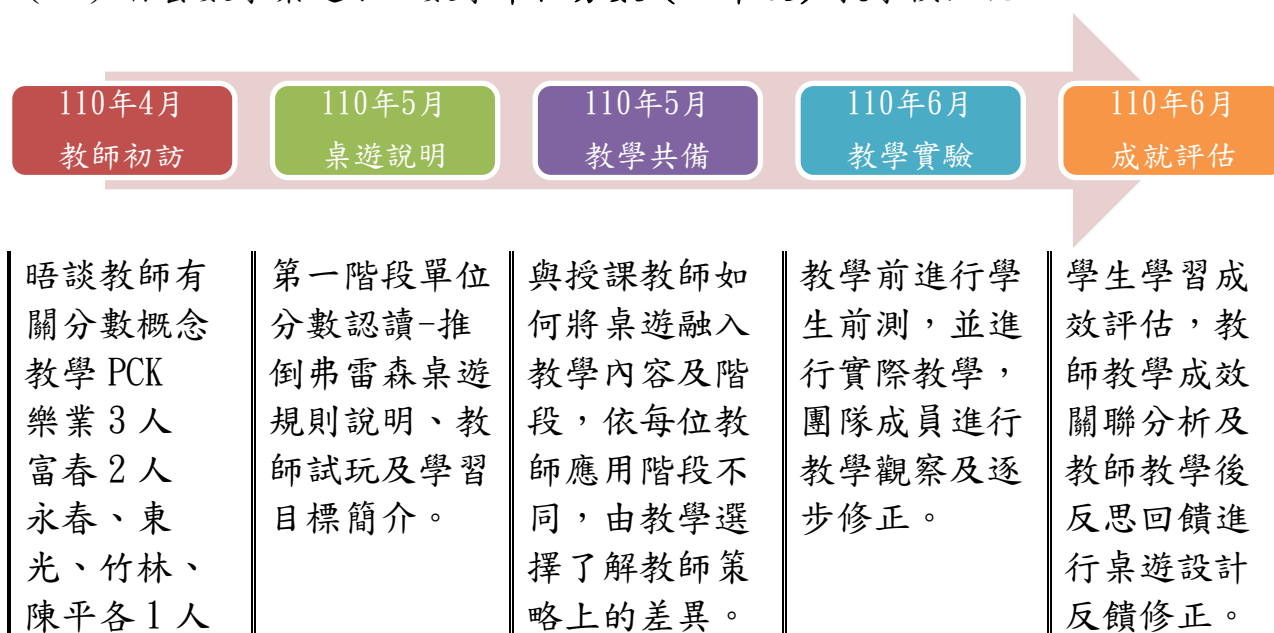
(五) 第二階段設計桌遊融入各階段數學學習重點規畫與模組設計探討。

#### 肆、目前完成進度

(一) 首套數學桌遊用品-「分數卡」精緻化。



(二) 首套數學桌遊融入數學單位分數（二年級）教學模組化。





(三) 與現場教師進行數學桌遊融入數學教學探討與應用。



(四) 單位分數聚合、簡單等值分數、單位分數加減桌遊設計。

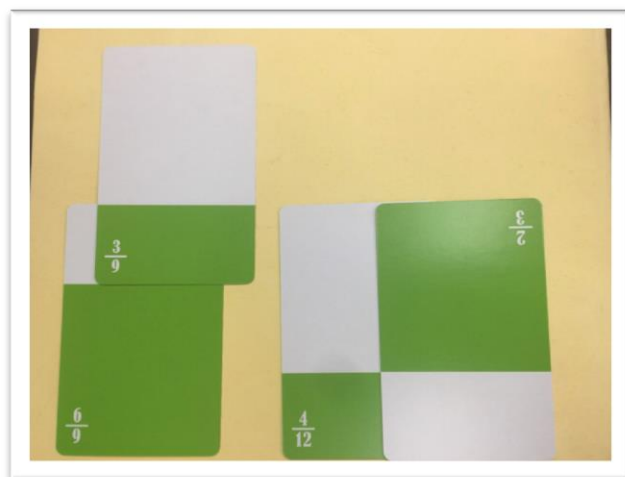
1. 魔法合一術(數)

(1) 結合數學領域課綱學習內容：

N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。**知道「和等於1」的意義。**

(2) 桌遊規則簡介：

- A. 牌卡洗勻後，玩家們任抽一張，由牌卡顯示的顏色量最多的玩家擔任莊家。
- B. 莊家將牌卡洗勻後，莊家從6自己開始，順時針發牌，直到牌卡發完。
- C. 玩家先檢視自己手上的牌卡，進行魔法合一數及釋放牌卡的動作。
- D. 從莊家開始，順時針的向下一家玩家進行抽一張牌。
- E. 玩家抽取到的牌卡，若能跟手上持有的牌卡進行魔法合一數，亦可進行釋放牌卡的動作。



F. 遊戲持續進行，能將手牌完全釋放出去的玩家，即是贏家。

「合一數」補充說明：

a. 任兩張牌卡上的顏色量，若能組合為完整的一張，即完成魔法合一數，這兩張牌卡就可以被釋放。

如：標示為  $1/4$  的牌卡可以跟  $3/4$ 、 $6/8$ 、 $9/12$  的牌卡進行合一數及釋放。

b. 手牌中的任意牌，可以擔任任何數量的分數牌卡，與其他分數牌進行魔法合一數的動作，只要完成合一數，也可以被釋放。

如：任意牌+ $1/2$ （任一張分數牌卡）；任意牌+任意牌，都可被釋放。

## 2. 弗雷森分身術（數）

（1）結合數學領域課綱學習內容：

N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。

（2）桌遊規則簡介：

A. 牌卡洗勻後，玩家們任抽一張，由牌卡顯示的顏色量最多的玩家擔任莊家。

B. 莊家將牌卡洗勻後，莊家從 6 自己開始，順時針發牌，直到牌卡發完。

C. 玩家先檢視自己手上的牌卡，進行魔法合一數及釋放牌卡的動作。

D. 從莊家開始，順時針的向下一家玩家進行抽一張牌。

E. 玩家抽取到的牌卡，若能跟手上持有的牌卡進行魔法分身數，亦可進行釋放牌卡的動作。

F. 遊戲持續進行，能將手牌完全釋放出去的玩家，即是贏家。

「分身數」補充說明：

a. 任兩張牌卡上的顏色量，若能比較為相等的一張，即完成魔法分身數，這兩張牌卡就可以被釋放。



如:標示為  $\frac{1}{2}$  的牌卡可以跟  $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{4}{8}$ 、 $\frac{6}{12}$  的牌卡進行合一數及釋放。

b. 手牌中的任意牌，可以擔任任何數量的分數牌卡，與其他分數牌進行魔法分身數的動作，只要完成分身數，也可以被釋放。

如:任意牌+ $\frac{1}{2}$ (任一張分數牌卡)；任意牌+任意牌，都可被釋放。

### 3. 弗雷森聖物

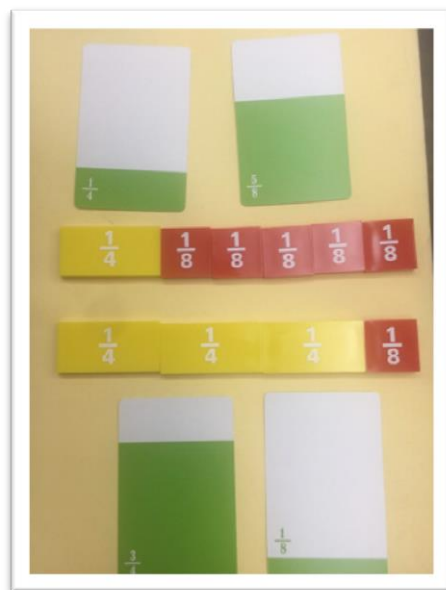
#### (1) 結合數學領域課綱學習內容：

N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。**簡單同分母分數比較、加、減的意義**。牽涉之分數與運算結果皆不超過 2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於 1」的意義。

N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。**同分母分數的比較、加、減**與整數倍。

#### (2) 桌遊規則簡介：

- A. 牌卡洗勻後，玩家們任抽一張，由牌卡顯示的顏色量最多的玩家擔任莊家。
- B. 莊家將牌卡洗勻後，莊家從 6 自己開始，順時針發牌，每人手持 4 張牌卡。
- C. 每打出一張牌卡，可以自分數牆拿出相對應的量來進行累積，或是拿走相對應的量。
- D. 當能量條抵達聖物的位置，玩家就可以取得該項聖物。
- E. 玩家取得斗篷、魔法杖、能量石三項聖物，即是贏家。



#### (五) 第二階段設計桌遊融入各階段數學學習重點規畫與模組設計探討。

桌遊名稱	桌遊設計期	桌遊實踐期	教學融入期	教學實驗期	成效評估期
推倒弗雷森					
魔法合一數					

魔法分身數				
弗雷森聖物				
沉睡的聖物				

## 伍、預定完成進度

- 一、規畫以分數桌遊為主題，辦理暑期數學育樂營。
- 二、撰寫本年度科教專案期末報告。
- 三、修正牌套設計，加強測量工具的應用（如弗雷森聖物的分數牆卡座）。
- 四、申請相關計畫，進行後續設計。

## 陸、討論與建議(含遭遇之困難與解決方法)

- 一、數、量遊戲活動設計的整合有其難度。
- 二、牌卡開版困難與卡套列印費時，物品材質開發尚待研發。
- 三、活動對象安排因學齡有所差異，活動指導語為避免取代學生探究學習的過程，亦需依學齡進行調整。
- 四、活動與主要概念授課的時間仍有差異，遊戲活動所需時間較長，影響教師應用課堂教學的意願。
- 五、融入教學設計視個人對於桌遊的應用和教學策略有關，個別差異大。

## 柒、參考資料

- 一、十二年國民教育課程綱要-數學領域
- 二、「玩趣數學~翻轉吧！我們的數學教室」-部落格
- 三、王筱妮（2018）。桌遊的設計及融入國小三年級數與計算課程之研究（未出版碩士論文）。國立中山大學，高雄市。
- 四、王筱妮、梁淑坤（2018）桌遊的設計及融入國小三年級數與計算課程之設計與反思。臺灣數學教師，39(2)，p23-49。
- 五、詹孟傑（2020）。桌遊融入教學之省思。臺灣教育評論月刊，9(5)，p118-124。
- 六、黃昭銘等（2014），「行動科技融入國小數學『分數』學習活動之研究」，教育科技學習 2:2，P189-206。
- 七、陳介宇（2010），從現代桌上遊戲的特點探討其運用於兒童學習的可行性，國教新知，57（4），P40-45。





臺灣國小階段數學領域分數教學與  
學習遊具設計及成效研究

教育部109年度中小學科學教育計畫專案期末報告@彰化師範大學on line  
蔡嘉豪、楊惠琪、吳豪杰、張博盛、元嫻文 110.06.25

後來，後來

八月

- 邀請臺中市國教輔導團數學領域輔導員到校分享
- （友情來相聚，談錢就傷感情了！）

九月

- 接受肯定，到臺中市教師成長研習-夢的N次方進行成果發表
- 不管數學好不好，老師也能玩得很盡興

十月

- 計畫審查獲得通過，核定補助
- 著手修正桌遊設計（期間也到雲林僑美國小進行分享）

十一月

- 開會、討論
- 尋求合作（實驗）對象

十二月

- 修正與創意發想
- 尋求資源，落實創意

期中報告後的玩數家族~~

一月	<ul style="list-style-type: none"><li>• 完成「弗雷森魔法師」桌遊輸出。</li><li>• 教案設計及施測訪談內容確定。</li></ul>
二月	<ul style="list-style-type: none"><li>• 桌遊數學假日育樂營活動規畫（半日、一日）。</li><li>• 育樂營活動教師共備。</li></ul>
三月	<ul style="list-style-type: none"><li>• 社群伙伴學校辦理課間試教（二節）。</li><li>• 依辦理情形回饋並修正桌遊教學模組</li></ul>
四月	<ul style="list-style-type: none"><li>• 至合作學校辦理假日育樂營活動（樂業、富春、永春）</li><li>• 學生學習成效、態度量表及訪談資料分析。</li></ul>
五月	<ul style="list-style-type: none"><li>• 至合作學校辦理假日育樂營活動（東光、竹林、陳平）</li><li>• 學生學習成效、態度量表及訪談資料分析。</li></ul>
六月	<ul style="list-style-type: none"><li>• 撰寫並提出本年度專案期末報告。</li><li>• 辦理各校夏日樂學-暑期學習不斷電相關活動規畫。</li></ul>

順序早了些，先來作準備

- ▶ 桌遊設計研究本以學習為目的，但應要先研究學習概念和規則間的連結關係才能修正。
- ▶ 學童學習先備知識影響桌遊進行的流暢程度。



放到課堂間，實踐桌遊融入教學設計

▶ 前測



108年度的紙筆測驗

109年度的線上紀錄



放到課堂間，實踐桌遊融入教學設計 (1) (2) (3)

▶ 教學



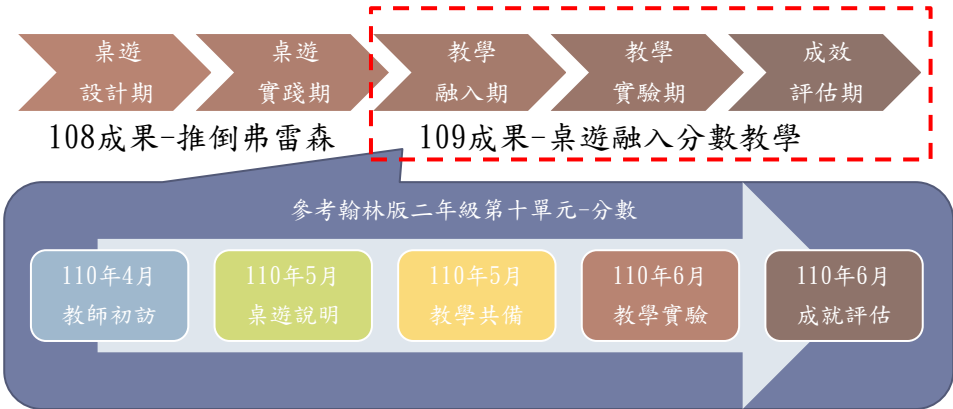
放到課堂間，實踐桌遊融入教學設計

▶ 後測



課堂實踐小結論-沒有一種教學可以被複製

- ▶ 八位老師，對於桌遊指導的觀點各有差異及巧妙。
- ▶ 八組學生，以桌遊產生不同的學習動機和成效。
- ▶ 教與學的關係密切，怎麼應用桌遊存乎於一心。





# 桌遊融入數學分數教學

110年6月  
教學實驗

110年6月  
成就評估



教學策略/方法建議		教學策略/方法建議
學習的更多面向，從學習過程有獨立思考與探索	進行情境教學 使用在正式教學前進行練習	進行情境教學 使用在正式教學前進行練習
注重教學，如中學的學生可以從數學的計算，實物或有趣的技巧與生活中的數學結合	雙方溝通數字表示 從年級1-30(或減法應用) 加上行和列操作。可以讓一年級學生學習	雙方溝通數字表示 從年級1-30(或減法應用) 加上行和列操作。可以讓一年級學生學習
有系統，並讓其逐步增加知識在課堂上應用。 利用學生自己的專注力與理解力去探究和解決問題 可以從減法與學生學習1-40的減法，也可以從減1-40的減法	教學第200分章，從行和列操作去理解減法的分章，讓學生體會可以用行和列操作去理解減法的方式，以及利用行和列去理解減法的方式。	1.學生利用數線和加法減法，探索正確答案，然後透過老師的回饋，和同學討論 2.教師提供資料，讓學生可以從年級小朋友的日記， 利用減法去理解減法，再由小種子去正式課堂的回饋 3.利用教學內容(正式課堂)去理解 利用減法去理解減法，再由小種子去正式課堂的回饋
學習減法，對一年級的學生在加減兩項方面是有幫助。 活動問題，如減法 從減法，如減法		
學習減法，對一年級的學生在加減兩項方面是有幫助。		

## 桌遊融入數學分數教學

110年6月  
教學實驗

110年6月  
成就評估



桌遊融入數學分數教學

110年4月  
教師初訪

110年5月  
桌遊說明

110年5月  
教學共備

110年6月  
教學實驗

110年6月  
成就評估



桌遊融入數學分數教學

110年4月  
教師初訪

110年5月  
桌遊說明

110年5月  
教學共備

110年6月  
教學實驗

110年6月  
成就評估

第一節  
不滿1的世界

1. 利用卡牌認識0和1間的其  
他可能存在。  
2. 練習將牌卡  
進行排序，結  
合左右、大小、  
多少的再練習。  
3. 複習舊經驗-  
如何知道卡片  
的顏色是不是  
有平分的現象。

第二節  
分數的魔法

1. 利用牌卡套  
來驗證平分的  
現象。  
2. 運用遊戲的  
魔法咒語情境  
練習分母為8的  
分數讀法。  
3. 分數魔法咒  
語的延伸，練  
習課本分母為2、  
分母為4的分數  
讀法。

第三節  
魔法前哨戰

1. 簡化桌遊規  
則，由老師和  
全班學生練習  
牌卡的進攻規  
則。  
2. 老師和全班  
學生對抗練習。  
3. 策略分享-要  
怎麼才能獲勝。  
4. 課本文本內  
容練習。

第四節  
弗雷森大戰

1. 習作習寫。  
2. 老師說明桌  
遊規則，分組  
進行桌遊，進  
行第1次的推倒  
弗雷森桌遊活  
動。  
3. 獲勝同學分  
享心得。  
4. 課本文本內  
容及交代回家  
作業，完成明  
天繼續桌遊。

第五節  
決戰弗雷森

1. 習作檢討  
2. 桌遊分組挑  
戰賽（預計最  
多進行兩回合）  
3. 頒獎。

  
規畫：  
樂業-楊惠琪老師  
富春-元嫻文老師

桌遊融入數學分數教學-反思、修正與回饋



桌遊融入數學分數教學-第二彈！



N-3-9簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於 1」的意義。

探討：

- (1) 知道「合」的操作及「和」的數學意涵。
- (2) 運用桌遊可以呈現「合」的結果嗎？
- (3) 「合」的操作，可以作為桌遊的規則嗎？

魔法弗雷森之

魔法合一術

桌遊融入數學分數教學-第二彈！



- 桌遊規則簡介：
- A. 牌卡洗勻後，玩家們任抽一張，由牌卡顯示的顏色量最多的玩家擔任莊家。
  - B. 莊家將牌卡洗勻後，莊家從6自己開始，順時針發牌，直到牌卡發完。
  - C. 玩家先檢視自己手上的牌卡，進行魔法合一數及釋放牌卡的動作。
  - D. 從莊家開始，順時針的向下一家玩家進行抽一張牌。
  - E. 玩家抽取到的牌卡，若能跟手上持有的牌卡進行魔法合一數，亦可進行釋放牌卡的動作。
  - F. 遊戲持續進行，能將手牌完全釋放出去的玩家，即是贏家。
- 「合一數」補充說明：
- a. 任兩張牌卡上的顏色量，若能組合為完整的一張，即完成魔法合一數，這兩張牌卡就可以被釋放。
  - 如：標示為1/4的牌卡可以跟3/4、6/8、9/12的牌卡進行合一數及釋放。
  - b. 手牌中的任意牌，可以擔任任何數量的分數牌卡，與其他分數牌進行魔法合一數的動作，只要完成合一數，也可以被釋放。
  - 如：任意牌+1/2(任一張分數牌卡)；任意牌+任意牌，都可被釋放。

桌遊融入數學分數教學-第二彈！





桌遊融入數學分數教學-第二彈！

桌遊  
設計期

桌遊  
實踐期

教學  
融入期

教學  
實驗期

成效  
評估期

一、分數的分類帽

(一) 由學生將卡片進行分類。

(二) 引導學生依卡片標示的「分母」將卡片分堆置放。

二、合一術練習生

(一) 認識 $2/2$ 、 $3/3$ 、 $4/4$ 、 $6/6$ 、 $8/8$ 、 $9/9$ 、 $12/12$ 也可以叫做「1」

(二) 哪些卡片有顏色的部份合起來剛好是「1」。

(三) 一定都可以找到兩張可以合而為「1」的卡片嗎？


三、合一術挑戰賽

(一) 進行桌遊-魔法合一術活動。

(二) 獲勝者策略分享-(有人可以發現等值分數的存在嗎？)

四、弗雷森大戰-魔法合一術

(一) 分組活動。



設計者：  
富春-吳豪杰老師

桌遊融入數學分數教學-第三彈！

桌遊  
設計期

桌遊  
實踐期

教學  
融入期

教學  
實驗期

成效  
評估期

N-4-5同分母分數：一般同分母分數教學(包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入)。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。

探討：

(1) 可以從操作中認識到什麼是「等值」嗎？

(2) 運用桌遊可以呈現「等值」的結果嗎？

(3) 「等值」的操作，可以作為桌遊的規則嗎？

魔法弗雷森之

弗雷森變身術

桌遊融入數學分數教學-第三彈！



- A. 牌卡洗勻後，玩家們任抽一張，由牌卡顯示的顏色量最多的玩家擔任莊家。
  - B. 莊家將牌卡洗勻後，莊家從6自己開始，順時針發牌，直到牌卡發完。
  - C. 玩家先檢視自己手上的牌卡，進行魔法合一數及釋放牌卡的動作。
  - D. 從莊家開始，順時針的向下一家玩家進行抽一張牌。
  - E. 玩家抽取到的牌卡，若能跟手上持有的牌卡進行魔法分身數，亦可進行釋放牌卡的動作。
  - F. 遊戲持續進行，能將手牌完全釋放出去的玩家，即是贏家。
- 「分身數」補充說明：
- a. 任兩張牌卡上的顏色量，若能比較為相等的一張，即完成魔法分身數，這兩張牌卡就可以被釋放。
  - 如：標示為 $1/2$ 的牌卡可以跟 $2/4$ 、 $4/8$ 、 $6/12$ 的牌卡進行合一數及釋放。
  - b. 手牌中的任意牌，可以擔任任何數量的分數牌卡，與其他分數牌進行魔法分身數的動作，只要完成分身數，也可以被釋放。
  - 如：任意牌+ $1/2$ (任一張分數牌卡)；任意牌+任意牌，都可被釋放。

桌遊融入數學分數教學-第三彈！







桌遊融入數學分數教學-第三彈！

桌遊  
設計期

桌遊  
實踐期

教學  
融入期

教學  
實驗期

成效  
評估期

一、分數的分類帽

(一) 由學生將卡片進行分類。

(二) 引導學生依卡片標示的「分母」將卡片分堆置放。

(三) 引導學生還有沒有其他的分類方式(一樣大小)

二、變身術練習生

(一) 引導學生依卡片標示的「分母」將卡片分堆置放。

(二) 自0/2、2/2、1/2、1/3、2/3、...找到一樣多的放在一起。

(三) 這些一樣多、分母卻不同的卡片，有沒有規律？

(四) 拿起其中一張，證明規律的猜測是否正確？

如：2/6可以找到4/12或1/3是因為？

三、變身術挑戰賽


(一) 進行桌遊-魔法合一術活動。

(二) 獲勝者策略分享-(有人可以發現等值分數的存在嗎？)

四、弗雷森大戰-魔法變身術

(一) 分組活動。

設計者：  
建安-張博盛老師



桌遊融入數學分數教學-第四彈！

桌遊  
設計期

桌遊  
實踐期

教學  
融入期

教學  
實驗期

成效  
評估期

N-3-9簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於1」的意義。

N-4-5同分母分數：一般同分母分數教學(包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入)。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。

(1) 可以從操作中認識到什麼是「加、減、和、差」嗎？

(2) 運用桌遊可以呈現「加、減、和、差」的結果嗎？

(3) 「加、減、和、差」的操作，可以作為桌遊的規則嗎？

魔法弗雷森之

弗雷森聖物

桌遊融入數學分數教學-第四彈！

桌遊  
設計期

桌遊  
實踐期

教學  
融入期

教學  
實驗期

成效  
評估期

(2) 桌遊規則簡介：

A. 牌卡洗勻後，玩家們任抽一張，由牌卡顯示的顏色量最多的玩家擔任莊家。

B. 莊家將牌卡洗勻後，莊家從自己開始，順時針發牌，每人手持4張牌卡。

C. 每打出一張牌卡，可以自分數牆拿出相對應的重量進行累積，或是拿走相對應的重量。

D. 當能量條抵達聖物的位置，玩家可以取得該項聖物。

E. 玩家取得斗篷、魔法杖、能量石三項聖物即是贏家。



桌遊融入數學分數教學-第四彈！

桌遊  
設計期

桌遊  
實踐期

教學  
融入期

教學  
實驗期

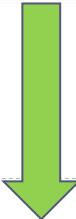
成效  
評估期





分數桌遊設計目前進度

桌遊名稱	桌遊設計期	桌遊實踐期	教學融入期	教學實驗期	成效評估期
推倒弗雷森					
魔法合一數					
魔法分身數					
弗雷森聖物					
沉睡的聖物					



分數的乘法  
分數的除法  
分數的四則  
...

有想法的教學，還需要許多支持與協助

- ▶ 教師增能需要被支持。
- ▶ 想法實現需要時間。
- ▶ 共備可以看到更多的教學概念。
- ▶ 桌遊融入數學教學是可以具體被實現的。
- ▶ 桌遊中認識數學概念，用解題策略來贏得桌遊的勝利。



Fraction Magic Math



讓孩子覺得數學好好玩，讓學生好好玩數學



報告結束 敬祈指教



# 玩數家族魔法佛雷森 教學活動設計

領域 / 科目		( 數學 )領域	設計者	玩數家族團隊
實施年級		第(一)學習階段 第(二)學習階段	總節數	共(5)節，(200)分鐘
單元名稱		分數		
教學日期			教學時間	
設計依據				
學習 重點	學習 表現	數-E-A1 具備喜歡數學、對數學世界好奇、有積極主動的學習態度，並能將數學語言運用於日常生活中。 數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學的關聯，並能嘗試與擬定解決問題的計畫。在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的運用。		
	學習 內容			
議題融入說明		學習 主題	無	

	實質 內涵	無
與其他領域/ 科目連結		無
教材來源		《魔法佛雷森》桌遊、翰林版二下數學教材
教學設備/資源		《魔法佛雷森》桌遊、黑板、粉筆
學習目標		
1. 能理解等分的概念 2. 能理解單位分數的概念 3. 能辨別同分母分數的大小 4. 能正確說出分數的讀法 5. 能透過遊戲規則回答出分數相關概念		

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p><b>第一節</b></p> <p>【準備活動】</p> <p>T：今天我們要來進入一個新的單元，在進入新單元之前，想先問問大家平常喜不喜歡吃披薩呢？</p> <p>S：喜歡／不喜歡</p> <p>T：那平常和家人買披薩的時候會買多少披薩回家吃呢？</p> <p>S：一個大披薩、兩個披薩</p> <p>T：那回到家後家中有這麼多人，大家會怎麼把披薩分給家人朋友呢？</p> <p>S：披薩上會有一刀一刀的痕跡，好像會分成八片，每個人都會先拿一片吃。</p>	3min	口頭評量
<p>【發展活動】</p> <p>T：那大家在拿披薩的時候會不會想拿看起來最大片的，如果拿到比較小片的就會覺得有點傷心，吃到的會比較少。</p> <p>S：會。</p> <p>T：所以如果我們是一個很貼心又很細心的披薩店老闆，我們會怎麼做呢？</p> <p>S：盡量讓每一片都一樣大，這樣大家就不會互相比較，都可以吃到一樣大片的披薩。</p> <p>T：很棒，我們把一個披薩分成八片的時候，每一片都切的一樣大，這樣分給大家吃的時候就會比較公平，每個人都吃得一樣多。這時候我們就會說我們把披薩「等分」成八等分。</p> <p>把一個東西分成每一份都一樣地的分法，就叫做「等分」。</p> <p>T：現在老師要發給大家一人一張色紙，我們來練習看看要怎麼等分一張色紙。</p> <p>T：現在請大家試試看把一張色紙等分成四等分，你會怎麼做呢？</p> <p>S：我把一張色紙先對折，接著再對折一次，把色紙打開來，色紙就被等分成四份了。</p> <p>S：我把色紙先折成兩個三角形，接著再對折一次，色紙就被等分成四個一樣大的三角形。</p> <p>S：我把色紙對折再對折一次，色紙就被分成四個一樣大的長方形。</p>	30min	口頭評量 實作評量

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>T：(拿起三種不同的折法展示)大家覺得哪一個才有做到老師說的等分成四份呢？</p> <p>S：三個都有，因為每一張色紙都被分成一樣大的四分了，所以他們都有等分。</p> <p>T（利用課本上的圖片及類題確認學生對於等分的概念）</p>		
<p>【統整活動】</p> <p>T：現在大家都已經知道等分的概念了，接下來老師要再發一張色紙給大家，請大家將這張色紙等分成八等分，分完的小朋友請和旁邊的小朋友互相檢查。（老師檢查每一位學生是否都能進行等分色紙的任務）</p>	7min	實作評量
<p><b>第二節</b></p> <p>【準備活動】</p> <p>課前請大家依照小組座位坐好</p> <p>T：我是魔法師阿元，今天的數學課我們要一起前往一個魔法學校，在魔法學校裡面每一位小朋友都是小小魔法師哦！那今天魔法師們要做什麼事呢？首先我們要把今天魔法學校會用到的魔法用具發給大家。（老師先發下一人一個白色卡套和一組一套的藍色和綠色牌卡）</p>	5min	
<p>【發展活動】</p> <p>在課前請學生先移動成小組座位</p> <p>一、引起動機</p> <p>T：首先剛成為魔法師的我們要先學會念正確的咒語，老師現在就要來告訴大家正確的咒語要怎麼唸哦！</p> <p>T：首先我們要先將卡片放進白色的卡牌中，先數一數藥水到第幾格，例如這張到第一格，我們就要念出卡片的顏色藍色或是綠色，加上八分之一。那如果是到第二格的藍色藥水呢？</p> <p>S：藍色八分之二</p> <p>T：很棒！之後我們要猜到其他魔法師的神奇配方，都需要使用到這個咒語哦！</p> <p>（老師隨機配對牌卡讓學生念出咒語名稱）</p> <p>T：想問問大家覺得為什麼咒語裡面會有八分之這三</p>	30min	口頭評量 實作評量



# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>個字呢？</p> <p>S：因為藥水被分成八等份</p> <p>T：沒錯，我們上一節課學過等份的意思，這個藥水剛好被分成八等份，所以我們就會叫他八分之多少。那想問問大家如果是這個的話我們可以怎麼讀呢？（老師拿起藍色四分之一放入四分牌卡套中）</p> <p>S：藍色四分之一</p> <p>T：為什麼是四分之一呢？</p> <p>S：因為他被分成四等份，藥水到第一格，所以是四分之一</p> <p>T：大家已經知道念咒語的小訣竅了哦！大家都拿到成為厲害魔法師的第一張門票了。</p> <p>T：那麼，在施展魔法的時候，還有一件事情相當重要，就是要知道哪一個藥水比較多。現在，老師手上的這兩瓶藥水，哪一瓶比較多呢？</p> <p>（左：綠色八分之一）（右：綠色八分之六）</p> <p>S：右邊比較多。</p> <p>T：為什麼你會覺得右邊比較多呢？</p> <p>S：因為它綠色的地方比較多。</p> <p>T：答對囉！</p> <p>T：那麼，現在各小組，幫我找出「八分之三」以及「八分之六」的藥水放進你們面前的白色藥水罐（白色卡座）裡面。最先放好的全組趴下，讓老師知道你們已經完成囉！</p> <p>T：哇！經過剛剛的關卡，發現大家都可以比較不同藥水之間的大小了呢！接下來，關卡會難一點點喔。請組長拿出一份白色藥水罐。</p> <p>S：（各組拿出一份白色藥水罐）</p> <p>T：剛剛老師有考驗過各個小小魔法師，都還記得我們的魔法咒語。接下來，就要使用到魔法咒語囉。</p> <p>T：老師會把三張藥水放在你們的桌上，請先不要打開。待會，老師數到一二三後，請你們打開並且放進白色城堡內，同時也別忘了，依照由左至右，由小到大的順序排好喔。等到老師走到你們那一組，你們還要「說出」那一格白色藥水罐的咒語喔！</p> <p>T：加了一點點難度的關卡，小小魔法師們有信心嗎？</p>		

# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>S：有！</p> <p>T：(老師各組放三張卡片，並確定白色藥水罐都擺好)</p> <p>T：準備囉！一、二、三！</p> <p>S：(學生將藥水牌卡翻開進行放置)</p> <p>T：老師看到大家都準備好了！真是厲害！接下來老師要一組一組下去確認囉！</p> <p>T：第一組，請問這一張的咒語是什麼？</p> <p>S(第一組)：藍色八分之一藥水</p> <p>T：正確答案！</p> <p>T：(老師依序確認過每一組，直到每一組都能正確講出咒語)</p> <p>T：天啊！你們通過層層關卡，接著在我們的魔法國度，要學會「讀心術」，除了要講得出咒語，要把城堡放到正確的位置之外，還需要具備「想想看、找找看、猜猜看」的能力。</p> <p>T：接下來，第三關「躲起來的藥水，在哪裡？」請各位小小魔法師，來猜猜看，如果老師的白色藥水罐已經有這七張綠色的藥水……那麼還剩下一張會是什麼呢？</p> <p>S：綠色八分之二藥水！</p> <p>T：為什麼是綠色八分之二藥水呢？</p> <p>S：因為老師手上有八分之零到八分之八的藥水，可是少了八分之二的藥水！</p> <p>T：哇！觀察力非常敏銳！真的是剩下八分之二呢！看來我們班已經出現「讀心術」魔法師囉！</p> <p>T：不過，這一關才沒有這麼容易。老師接下來手上只剩下六瓶藥水。有沒有人可以告訴老師，還有哪兩瓶藥水被隱藏起來，還沒有被猜到的！</p> <p>S：八分之三以及八分之八。</p> <p>T：說說看為什麼呢？</p> <p>S：因為老師的藥水罐裡面已經有了八分之零、八分之一、八分之二、八分之四、八分之五、八分之六、八分之七張藥水，就只剩下八分之三以及八分之八！</p> <p>T：太厲害了！完全正確呢！</p> <p>T：太好了，大家都已經會正確的施展咒語、建築城堡以及比較多或少了。</p>		

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p><b>【統整活動】</b></p> <p>T：最後一關，老師會到各組，施展「隱藏魔法」，把你們各組的藥水隱藏起來。等等老師數到三，你們再一起找出被隱藏的藥水。這是通過我們第一級魔法師的最後一關喔……各位小小魔法師一定沒有問題的！</p> <p>T：（老師排列各組藥水牌卡，將三張收起來）</p> <p>T：請問第一組，你們被隱藏起來的藥水是哪三張呢？</p> <p>S（第一組）：八分之一、八分之五、八分之六</p> <p>S（第二組）：八分之二、八分之五、八分之八</p> <p>S（第三組）：八分之三、八分之六、八分之七</p> <p>S（第四組）：八分之一、八分之二、八分之五</p> <p>T：太厲害了！各位小小魔法師都已經學會了非常厲害的魔法——讀心術了呢！</p> <p>T：下一節課的時候我們就會一起來進行魔法弗雷森的遊戲了哦！</p>	5min	口頭評量 實作評量
<p>第三節+第四節</p> <p><b>【準備活動】</b></p> <p>T：上一節數學課我們已經學會如何念咒語，也知道如何把自己的藥水瓶排出正確的順序了。我們先來複習一下（拿出幾個不同的牌卡組合讓大家練習念咒語）大家都還記得上次學到的魔法師訣竅呢！那今天我們就要來進行魔法師的魔法競賽了哦！</p> <p>首先我們要先來看看這個比賽的規則</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 請每個人先拿五個藥水瓶</li> <li>2. 一人抽一張黑色的卡片，比比看誰拿到的最大，最大的可以先拿中間的牌卡，每個人都拿五張牌卡，想拿幾張藍色幾張綠色都可以哦，只要每個人都有五張就可以。</li> <li>3. 每個人把藥水裝進藥水瓶中，右邊放最多的藥水，左邊放最少的藥水，要照順序排好哦！如果有兩瓶一樣多的藥水，那藍色得比較大，要放在右手邊。</li> </ol>	15min	實作評量
<p><b>【發展活動】</b></p> <p>老師到台下檢查每個人是不是都有排正確。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>4. 準備工作都完成之後，我們就要來施魔法了！身為魔法師的大家，最重要的任務就是要猜出其他人的藥水配方是什麼，如果被別人猜到的藥水瓶就要放倒，</li> </ol>	45min	口頭評量 實作評量

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>可以保留自己藥水配方到最後的人就是最厲害的魔法師囉！</p> <p>5. 那如果不小心下錯魔咒，猜錯別人的魔法瓶裝了什麼藥水，就要抽一張中間的黑色牌卡，依照順序放到自己的藥水瓶中間。</p> <p>先進行一次示範賽，老師在旁邊觀看解說，其餘學生圍在旁邊看。</p> <p>大家都知道規則後，進行魔法弗雷森的遊戲兩次。</p>		
<p><b>【統整活動】</b></p> <p>T：大家剛剛都成為很厲害的魔法師了呢！在剛剛的過程中老師發現大家感覺都像是有讀心術一樣，可以猜中別人的藥水是多少。大家是怎麼辦到的呢？有沒有人想分享一下小秘訣？</p> <p>S：左邊的比較小，所以先從最小的開始猜。</p> <p>S：如果中間只剩一張，那要先觀察旁邊的是什麼藥水，這樣才猜的到。</p> <p>S：如果桌上已經有很多瓶藥水知道是什麼了，那會先數數看還差哪一個還沒有被發現。</p> <p>T：看來魔法師們都已經會比較大小了，也都可以透過比較大小來猜出別人的藥水是多少。</p> <p>S：黑色的藥水很好用，如果有先放就可以知道旁邊可能是什麼。</p> <p>T：有人提到黑色的藥水，想問問大家有沒有發現黑色藥水和藍色綠色有什麼關係？上面有那些數字和藍色的八分之四一樣多呢？（讓學生可以比對看看）</p> <p>S：有四分之二和二分之一。</p> <p>T：雖然他們有不一樣的名字，但是他們的量都一樣多，這個在之後的數學課上我們也會上到哦，這樣的分數我們就叫他們等值分數，是值一樣的分數。</p> <p>T：大家今天透過魔法弗雷森的遊戲都成為厲害的魔法師了，很棒哦！下一節我們會透過著些魔法技巧來讓我們的數學也向施魔法一樣變厲害哦！</p>	20min	口頭評量
<p>第五節</p> <p><b>【準備活動】</b></p> <p>複習桌遊內容</p> <p><b>【發展活動】</b></p>		

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
進行課本內容與桌遊的連結 課本習題練習  <b>【綜合活動】</b> 指派回家作業		



# 玩數家族之魔法弗雷森任務一

## 一、魔法師基本資料

就讀學校：\_\_\_\_\_ 就讀班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

## 二、一起來破解任務

- 我知道什麼是分數嗎？

☐ 知道 ☐ 不知道

- 這個「 $\frac{1}{2}$ 」應該如何讀呢？

☐ 一分子二 ☐ 一和二 ☐ 二分子一 ☐ 一之半

- 下列哪一個代表「 $\frac{3}{8}$ 」



- 請將下列魔法藥水依照多少來排序，由最少到最多依序在□寫上1到4



- 請將下列數字依照多少來排序，由最少到最多依序在□寫上1到4

☐  $\frac{3}{6}$  ☐  $\frac{5}{6}$  ☐  $\frac{1}{6}$  ☐  $\frac{6}{6}$

- 下面哪一個和  $\frac{1}{4}$  一樣大？



- 下面哪一個和  $\frac{4}{8}$  一樣多？

☐  $\frac{8}{4}$  ☐  $\frac{2}{4}$  ☐  $\frac{1}{4}$  ☐ 48

- 我喜歡數學嗎？非常喜歡請圈10，非常不喜歡請圈1

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

原因是：\_\_\_\_\_

# 玩數家族之魔法弗雷森最終任務

## 一、魔法師基本資料

就讀學校：\_\_\_\_\_ 就讀班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

## 二、一起來破解任務

- 這個「 $\frac{3}{8}$ 」應該如何讀呢？

☐ 八分之三   ☐ 三和八   ☐ 三分之八   ☐ 八之三

- 請將下列數字依照多少來排序，由最少到最多依序在□寫上1到4

☐  $\frac{6}{8}$    ☐  $\frac{1}{8}$    ☐  $\frac{3}{8}$    ☐  $\frac{4}{8}$

- 請將下列數字依照多少來排序，由最少到最多依序在□寫上1到4

☐  $\frac{6}{8}$    ☐  $\frac{1}{2}$    ☐  $\frac{1}{4}$    ☐  $\frac{3}{8}$

- 下面哪一個和  $\frac{2}{8}$  一樣多？

☐  $\frac{8}{2}$    ☐  $\frac{2}{4}$    ☐  $\frac{1}{2}$    ☐  $\frac{1}{4}$

- 請填出下列空格中的數字

$\frac{(\quad)}{8}$   $\frac{4}{8}$   $\frac{(\quad)}{8}$   $\frac{6}{8}$   $\frac{7}{8}$   $\frac{(\quad)}{8}$

$\frac{4}{4}$   $\frac{(\quad)}{4}$   $\frac{(\quad)}{4}$   $\frac{1}{4}$

- 下列哪一個代表「 $\frac{5}{8}$ 」

☐    ☐ 

☐    ☐ 

- 我喜歡這個遊戲嗎？非常喜歡請圈10，非常不喜歡請圈1

10   9   8   7   6   5   4   3   2   1

原因是：\_\_\_\_\_

- 我喜歡數學嗎？非常喜歡請圈10，非常不喜歡請圈1

10   9   8   7   6   5   4   3   2   1

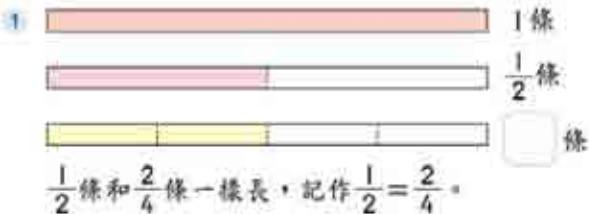
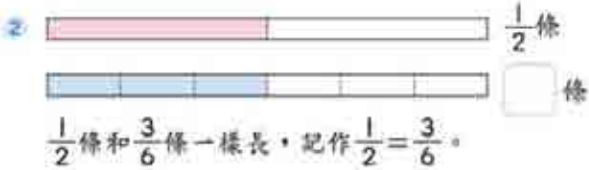
原因是：\_\_\_\_\_

# 玩數家族魔法佛雷森 魔法合一數教學活動設計

領域 / 科目		( 數學 ) 領域	設計者	玩數家族團隊
實施年級		第(二)學習階段	總節數	共(6)節，(240)分鐘
單元名稱		分數		
教學日期		111 年 4 月 06 日~4 月 13 日	教學時間	13:30 至 14:10
設計依據				
學習 重點	學習 表現	<p>n-I-6 認識單位分數。</p> <p>n-II-6 理解同分母分數的加、減、整數倍的意義、計算與應用。認識等值分數的意義，並應用於認識簡單異分母分數之比較與加減的意義。</p> <p>n-III-4 理解約分、擴分、通分的意義，並應於異分母分數的加減。</p>		
	學習 內容	<p>N-2-10 <b>單位分數的認識</b>：從等分配的活動（如摺紙）認識單部分為全部的「幾分之一」。知道日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。在已等分割之格圖中，能說明一格為全部的「幾分之一」。</p> <p>N-3-9 <b>簡單同分母分數</b>：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過 2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於 1」的意義。</p> <p>N-4-6 <b>等值分數</b>：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。</p>		
		核心 素養		<p>●領綱</p> <p>數-E-A1 具備喜歡數學、對數學世界好奇、有積極主動的學習態度，並能將數學語言運用於日常生活中。</p> <p>數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學的關聯，並能嘗試與擬定解決問題的計畫。在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的運用。</p>

議題融入說明	學習主題	無
	實質內涵	無
與其他領域/科目連結		無
教材來源		1. 《魔法佛雷森》桌遊卡牌套組 2. 翰林版數學四年級下學期課本、習作 <a href="https://reurl.cc/O0OYyg">https://reurl.cc/O0OYyg</a>
教學設備/資源		《魔法佛雷森》桌遊、黑板、粉筆、課本、習作
學習目標		
1. 能理解單位分數的概念 2. 能辨別同分母分數的大小 3. 能正確說出分數的讀法 4. 能透過遊戲規則回答出分數相關概念 5. 能進行兩不同分數和為一的活動		

# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>--第一節課開始--</p> <p>【準備活動】</p> <p>※回顧課程（分數）</p> <p>【發展活動】</p> <p>一、進行前測</p> <p>二、結合翰林版數學四年級下學期課本 P74 讓學生發現不一樣的分數卻代表一樣的數量</p> <p>① 看圖說說看，<math>\frac{1}{2}</math>條紙帶和「幾分之幾」條紙帶一樣長？</p>  <p>②</p>  <p>【綜合活動】</p> <p>※複習課程</p> <p>--第一節課開始--</p>	<p>3 分鐘</p> <p>20 分鐘</p> <p>12 分鐘</p> <p>5 分鐘</p>	<p>評量目的：了解學生所具備的基本能力。</p> <p>評量方式：紙本測驗。</p>
<p>--第二節課開始--</p> <p>【準備活動】引起動機：魔法師變身術</p> <p>T：各位小朋友，我們的魔法牌卡又再一次來到我們的班上囉！大家還記得我們學過的魔法師變身術嗎？</p> <p>S：記得。</p> <p>T：在我們上一個法術裡，我們發現了什麼事情呢？</p> <p>S：老師，我發現 <math>2/2</math> 跟 <math>5/5</math> 一樣多。</p> <p>S：老師，它們也跟 <math>3/3</math> 一樣多！</p> <p>T：太好了。</p> <p>S：老師，我還發現 <math>2/6</math> 跟 <math>4/12</math> 也一樣多。</p>	<p>3 分鐘</p>	<p>評量目的：確認學生都已了解遊戲規則。</p> <p>學生能正確比較同分母分數的大小並能找出分數相對應牌卡。</p> <p>評量方式：口語評量、實作評量</p>



教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>T：哇！大家都發現了很多「一樣多」的魔法牌卡。那有沒有人可以跟老師說，你們是怎麼知道他們一樣的呢？</p> <p>S：因為把他們這幾張魔法牌卡放在一起，他們有顏色的地方都一樣多。</p> <p>T：太好了，你們發現了很重要的關鍵因素呢！</p>		
<p>【發展活動】魔法合一數：初階</p> <p>T：也恭喜各位都學到了變身術！那麼，我們今天要來學習下一個魔法技能囉！</p> <p>T：我們今天的第二個魔法術，叫做「魔法合一數」！不過這個魔法術比較困難，這個魔法需要更加地專心喔，因此老師先教給大家「初階魔法合一數」。現在請大家一起看黑板，老師來教大家魔法咒語。</p> <p>（參考附件一：魔法合一數・練功坊）</p> <p>T：這一個魔法術的關鍵，就是需要不斷地把中央的牌卡釋放，而我們就是得到這些力量的魔法師；得到越多牌卡的魔法師，就會有越大的魔法能力喔！</p> <p>T：在初階合一數裡面，我們看到桌面上有好多富有力量的魔法牌卡，如果你是眼明手快的魔法師，你可以找得到「兩張合起來，能把你有刻度的卡牌座剛好集滿」，就可以得到這個力量囉。</p> <p>T：這樣大家都準備好了嗎？</p> <p>S：好囉！</p> <p>T：那我們遊戲準備——</p> <p>S：開始！</p> <p>（遊戲過程）</p>	<p>1 分鐘</p> <p>9 分鐘</p> <p>25 分鐘</p>	<p>評量目的：學生能學習遊戲規則並且進行遊戲。</p> <p>評量方式：口語評量、實作評量</p>
<p>【統整活動】</p> <p>複習法術</p> <p>T：各組的小朋友都太厲害了，很快的我們發現到桌子中央的牌卡一下子就都被拿走，成為每一個魔法師的力量了耶！你們可不可以說說看，你們是怎麼做到的？</p> <p>S：因為有些很明顯，像是 0/2 跟 4/4，一個是空空的，一個是全滿的，那它們合起來剛好就是一個滿滿的。</p> <p>T：太好了！直接用眼睛判斷！</p>	5 分鐘	

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>T：那還有沒有別種方式呢？</p> <p>S：有！就是可以用我們手上的牌座，拿過來擺進去，就可以發現兩張合起來可以讓牌座補滿，不會有空隙，那就知道這兩張可以合在一起。</p> <p>T：沒錯，善用工具也是很重要的呢。</p> <p>T：手中的牌卡座，也可以幫助我們快速辨別哪些卡拿回來的時候是不是可以合在一起的。剛剛老師看到很多小朋友不斷嘗試，這是魔法師很重要的精神喔。</p> <p>T：不過啊，有些小朋友的魔法沒有辦法發揮出神奇的力量，因為可能在比對的時候，不小心沒有排好，弄錯了……啊，那這是很可惜的一件事情喔。所以一定要細心，好好取得正確的兩張牌卡。</p> <p>T：在今天我們學校的初階魔法合一數，考驗大家眼明手快的能力，看來大家都得到好多好多的力量了呢。擁有力量的我們，在下一堂課就會讓大家學習進階魔法合一數喔！</p> <p>T：那我們今天課就上到這邊，下課。</p> <p style="text-align: center;">--第二節課結束--</p>		
<p style="text-align: center;">--第三節課開始--</p> <p><b>【準備活動】引起動機：初階魔法合一數</b></p> <p>T：好，各位小朋友，今天我們的桌上又出現了魔法卡牌囉，代表我們又到了魔法的世界，即將再進行一次魔法的法術練習。</p> <p>T：有誰還記得我們上一次學了什麼法術呢？</p> <p>S：初階魔法合一數。</p> <p>T：沒錯。</p> <p>T：因為魔法合一數比較困難一點點，所以我們上一節課先讓大家熟悉，所以教會了大家初階的法術。</p> <p>T：那有沒有人可以跟老師說，你學到了什麼什麼呢？</p> <p>S：我發現，這麼多卡牌中，顏色不同多寡的卡牌中，找到很多可以兩張、兩張讓牌卡補滿的卡片。</p> <p>T：沒有錯。那我們初階的合一數就是在學這個技巧喔。</p> <p>T：而今天呢，我們要進到進階魔法合一數囉。</p>	3 分鐘	<p>評量目的：學生能說出初階魔法合一數的玩法並且發現到其中的規則。</p> <p>評量方式：口語評量</p>

## 教學活動設計

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>【發展活動】魔法合一數：進階</p> <p>T：我們今天要學習的第二個魔法術，叫做「進階魔法合一數」！他跟初階魔法合一數不太一樣，老師教大家「進階魔法合一數」的施咒方法。現在請大家一起看黑板，老師來教大家魔法咒語。</p> <p>（參考附件一：魔法合一數・PK 賽）</p> <p>T：因為我們在初階所學習到的是獲得卡片，也就是得到能量。今天我們要來練習如何運用這樣子的力量。</p> <p>T：當每一個人手中都有牌卡的的時候，就要仔細觀察，有沒有哪兩張牌卡組合起來，可以像初階魔法合一數一樣，可以讓他把牌座填滿。</p> <p>T：要特別注意遊戲規則中，手中的牌是你自己一開始的力量，當遊戲開始之後，你就要下「下一個人」（順時鐘方向）抽取一張牌卡，如果這張牌卡可以跟你手中的牌卡一起將牌座填滿，那就可以把這兩張牌卡丟出來，也就是釋放牌卡。</p> <p>T：最先把手中全部的牌卡都釋放出去的魔法師，就學會了我們進階魔法合一數囉！</p> <p>T：這樣大家都準備好了嗎？</p> <p>S：好囉！</p> <p>T：那我們遊戲準備——</p> <p>S：開始！</p> <p>（遊戲過程）</p>	<p>1 分鐘</p> <p>9 分鐘</p> <p>25 分鐘</p>	<p>評量目的：學生能學習遊戲規則並且進行遊戲。</p> <p>評量方式：口語評量、實作評量</p>

## 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p><b>【綜合活動】</b></p> <p>複習法術</p> <p>T：好。大家要記得把魔法牌卡收好，整齊放好喔。</p> <p>T：今天我們學到了進階魔法合一數，已經讓大家對於這個法術越來越熟悉囉。</p> <p>T：老師想請問大家，你們覺得初階跟進階一樣的地方是什麼呢？</p> <p>S：都是要找到兩張一樣的牌卡，看看他們可不可以把牌座填滿。</p> <p>T：沒錯。所以我們可以發現，在桌上面的牌卡，雖然他們的數字不一樣，但把他們放進牌座之後，發現它們居然一樣多耶！這真是太神奇了。</p> <p>T：那有小朋友知道它們為什麼一樣多嗎？</p> <p>S：因為它們放進牌座裡面，刻度顯示的都一樣。</p> <p>T：沒錯。</p> <p>T：那麼大家有沒有發現，是哪幾張牌卡它們的刻度都一樣呢？</p> <p>S：像是 <math>1/2</math> 跟 <math>2/4</math>、<math>3/6</math> 一樣。</p> <p>S：還有 <math>2/5</math> 跟 <math>6/15</math> 也一樣耶。</p> <p>T：沒錯喔。</p> <p>T：而在這麼多牌卡裡面，就可以找到兩張牌卡，能夠組合在一起，讓他們一起填滿牌座，發揮出更強大的力量。這就是我們這兩節課學習到的初階與進階的魔法合一數！</p> <p>T：我們今天課就上到這邊，下課。</p> <p style="text-align: center;">--第三節課結束--</p>		

# 教學活動設計

## 教學活動內容及實施方式

時間

評量說明

—第四節課開始—

### 【準備活動】

複習初階及進階魔法合一數

3 分鐘

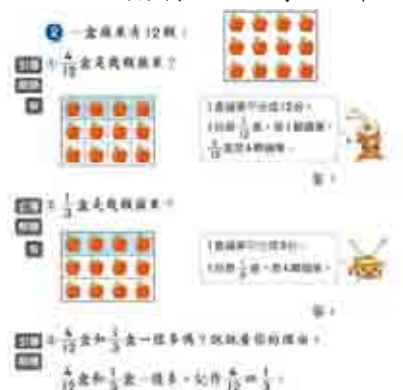
評量目的：學生能夠連結遊戲與課本中的概念。

### 【發展活動】

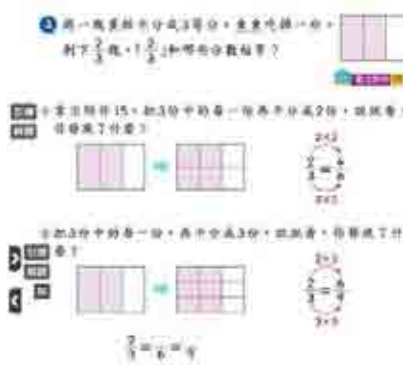
結合翰林版數學四年級下學期課本 P75-76

35 分鐘

評量方式：口語評量、紙本評量



※配合概念：牌卡中，不同的數字（分數），但它們顏色的數量卻一樣多。



※配合概念：牌卡中，總是有幾張卡片他們的數量會一樣多。

### 【綜合活動】

複習課本概念，結合桌遊學到的法術與課本的連結  
—第四節課結束—

2 分鐘



教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>--第五節課開始--</p> <p>【準備活動】 複習桌遊以及課本內容</p> <p>【發展活動】 進行習作練習 訂正數學習作且指導正確答案</p> <p>【綜合活動】 指派回家作業</p> <p>--第五節課結束--</p>	<p>3 分鐘</p> <p>25 分鐘</p> <p>2 分鐘</p>	<p>評量目的：學生能夠將學校的概念運用在習作中並且正確答題。</p> <p>評量方式：口語評量、紙本評量</p>
<p>--第六節課開始--</p> <p>【引起動機】 檢討習作回家作業易錯題型</p> <p>【發展活動】 進行桌遊遊戲</p> <p>【綜合活動】 結合桌遊與課本內容，討論其相似之處。</p> <p>--第六節課結束--</p>	<p>5 分鐘</p> <p>25 分鐘</p> <p>5 分鐘</p>	<p>評量目的：學生能夠熟悉遊戲規則。</p> <p>評量方式：實作評量。</p>
教學提醒	<p>1. 進行初階魔法合一數以及進階魔法合一數時須詳述規則</p> <p>2. 活動進行時，不需著重在數學理論，而是在於發現特徵</p> <p>3. 不需要強調學生理解牌卡上分數的意義，能理解規則、進行遊戲即可。</p>	

弗雷森魔法世界的牌卡被封印了!快施展魔法合一數解救弗雷森的牌卡世界!

製作人：樂業國小 楊惠琪老師

### 魔法合一數・練功房

練功裝備:弗雷森分數牌卡一副(51 張分數牌卡+3 張任意卡)、卡牌座每人 1 座

練功人數:2-6 人(推薦 4 人、6 人)

密技:魔法合一數

起手式:

1. 玩家每人一個卡牌座
2. 將卡牌中的任意卡抽出 2 張，剩下的 1 張和 51 張分數牌卡洗均勻、分數牌能表示數量的顏色面朝上，放置在所有玩家的中間
3. 玩家可將牌卡放入卡牌座中，裡用卡牌座進行顏色的累積比對，只要兩張牌卡上的顏色區塊能滿一張(集滿卡牌座的所有刻度量)，就算完成一次魔法合一數的練習，並將牌卡釋放後，放置在自己的身邊。
4. 完成一次的魔法合一數後，可持續練習，直到中間放置的牌卡都被釋放。
5. 遊戲結束，能利用魔法合一數釋放越多張牌卡的玩家，功力越厲害。

### 魔法合一數・PK 賽

遊戲裝備:弗雷森分數牌卡一副(51 張分數牌卡+3 張任意卡)

玩家人數:2-6 人(推薦 4 人、6 人)

遊戲規則:

1. 牌卡洗勻後，玩家們任抽一張，由牌卡顯示的顏色量最多的玩家擔任莊家。
2. 莊家將牌卡洗勻後，莊家從 6 自己開始，順時針發牌，直到牌卡發完。
3. 玩家先檢視自己手上的牌卡，進行魔法合一數及釋放牌卡的動作。
4. 從莊家開始，順時針的向下一家玩家進行抽一張牌。
5. 玩家抽取到的牌卡，若能跟手上持有的牌卡進行魔法合一數，亦可進行釋放牌卡的動作。
6. 遊戲持續進行，能將擁有的牌卡完全釋放出去的玩家，即是贏家。

弗雷森特殊技能說明:

#### 魔法合一數

1. 任兩張牌卡上的顏色量，若能組合為完整的一張，即完成魔法合一數，這兩張牌卡就可以被釋放。  
如:標示為  $\frac{1}{4}$  的牌卡可以跟  $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{6}{8}$ 、 $\frac{9}{12}$  的牌卡進行合一數及釋放。
2. 手牌中的任意牌，可以擔任任何數量的分數牌卡，與其他分數牌進行魔法合一數的動作，只要完成合一數，也可以被釋放。如:任意牌+(任一張分數牌卡)或 任意牌+任意牌，都可被釋放。

# 玩數家族 分數的分類帽 教學活動設計

領域 / 科目		( 數學 )領域	設計者	玩數家族團隊
實施年級		第(二)學習階段	總節數	共(3)節，(120)分鐘
單元名稱		變身術練習生的成長史		
設計依據				
學習重點	學習表現	n-II-6 理解同分母分數的加、減、整數倍的意義、計算與應用。認識等值分數的意義，並應用於認識簡單異分母分數之比較與加減的意義。	核心素養	●領綱 數-E-A1 具備喜歡數學、對數學世界好奇、有積極主動的學習態度，並能將數學語言運用於日常生活中。 數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學的關聯，並能嘗試與擬定解決問題的計畫。在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的運用。
	學習內容	N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。		
教材來源		《魔法弗雷森》桌遊		
教學設備/資源		1. 《魔法弗雷森》桌遊(每小隊 2 副) 2. 黑板、粉筆 3. PPT 4. 藥水對照卡(每小隊每回合 1 張)		
學習目標				
1. 能正確說出分數的讀法。 2. 能透過遊戲規則回答出分數相關概念。 3. 從量感中認識等值分數並精熟。				

# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p style="text-align: center;"><b>第一節開始</b></p> <p style="text-align: center;"><b>【準備活動】---藥水挑選與分類</b></p> <p>一、引起動機</p> <p>T：各位小小魔法師們，我是魔法老師阿盛，歡迎大家來到魔法的世界，現在大家都按照四個人為一組的方式坐在你們的位置上囉，真好。</p> <p>T：老師知道大家都已經學會如何認識不同的藥水名稱，現在桌上有兩份大家熟習的弗雷森牌卡，首先請大家先把分母是：2、3、4、6、8的藥水拿出來喔！</p> <p>S：（拿出卡片並小聲念出卡片上的分數）。</p> <p>T：太好了！</p> <p>T：那麼，大家有玩過推倒弗雷森，是按照順序排放大小的，今天我們要來玩的是「變身數練習生」，什麼意思呢？有點像抽鬼牌剛開始的時候，我們要把兩張相同大小的藥水卡片先抽出來放，有沒有誰可以先說說有哪些牌卡是一樣多的啊？</p> <p>S：（左：綠色八分之一）（右：綠色八分之一）</p> <p>T：答對囉！那還有沒有其他的答案呢？</p> <p>S：（左：綠色三分之一）（右：綠色六分之二）</p> <p>T：大家覺得是嗎？我們一起把藥水放在一起比對看看喔？</p> <p>S：是的。</p> <p>T：那麼，現在各小組，請每個人幫我找出「二組」相同大小的藥水卡片，好的同學可以就趴下，讓老師知道你們已經完成囉！</p> <p>T：太好了，大家都已經會正確的玩「弗雷森練習生」。</p> <p style="text-align: center;"><b>【發展活動】---弗雷森的變身術練習</b></p> <p>T：接下來，我們就要正式進行「變身術練習生」的資格挑戰賽囉！只有成功通關的魔法師，才可以取得「變身術練習生」的身分囉！之後再繼續參加變身術正式生的挑戰！</p> <p>一、變身術練習生</p> <p>T：現在，每一小組的桌上都有剛剛我們一起分類完的初階版藥水，加入1張任意卡後，請每小隊的一號</p>	<p>5 分鐘</p> <p>25 分鐘</p>	<p>口語評量、 實作評量</p> <p>小組合作、 口頭發表、 實作評量</p>

# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>隊員幫老師洗均勻，並且二號隊員幫老師發給每個人（一樣多的放在正中間），完成的小隊請雙手放在藥水上。</p> <p>T：接下來請剪刀石頭布決定遊戲順序，採逆時針進行，剩餘的藥水按照遊戲順序發下。</p> <p>遊戲規則是：</p> <p>(1) 手上若有 2 瓶藥水是相同大小的，就可以丟出來。</p> <p>(2) 每回合可以丟 0~2 組(最多 4 瓶)藥水出來，並在丟出來的時候要唸出藥水上的分數才過關。</p> <p>(3) 輪到下一位的時候可以抽下一位的 1 瓶藥水，再開始丟藥水出來。</p> <p>(4) 輪到最後若每人皆剩一張，無法結束遊戲，就結算分數。</p> <p>※分數：每獲得一瓶藥水為 1 分，剩餘的卡不得分。</p> <p>那現在大家開始練習弗雷森變身術！</p> <p>S：(練習中)&gt;&gt;練習完第一局了</p> <p>【統整活動】---藥水對照紀錄時間</p> <p>T：好，那現在每個小隊幫老師一起把一樣多的藥水找出來，並請五號隊員紀錄在「藥水對照卡」上喔！紀錄完之後請幫老師放到黑板上，我們下一節上課一起看看全班有沒有通過練習生的考驗！</p> <p>第一節結束 第二節開始</p>	10 分鐘	實作評量
<p>【暖身活動】---變身術的練習</p> <p>T：我們來看看大家的藥水紀錄卡喔。(確認有沒有記錄錯誤或迷思)</p> <p>T：各位練習生很棒喔！剛剛老師看到大家都能正確地把找到一樣多的藥水並配對在一起，其實像 <math>\frac{1}{2}</math>、<math>\frac{2}{4}</math>、<math>\frac{4}{8}</math> 這些一樣大的分數，我們就稱他們叫做等值分數，有沒有小朋友發現還有其他一樣多的分數呢？</p> <p>S：<math>\frac{1}{3}</math>、<math>\frac{2}{6}</math></p> <p>T：對！沒錯，看來經過剛剛的考驗，發現大家都可以找到一樣多的藥水了呢！接下來，我們在練習一次</p>	5 分鐘	小組合作、 口頭發表、

# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>基礎版的藥水分類喔。等等就要進入正式版的藥水考驗了！</p> <p>S：(再進行一次變身術練習)</p> <p>T：(教師巡視並確認每位學生完成分類，針對學生做個別指導)</p> <p>【發展活動】---變身術正式檢定的前一天</p> <p>T：現在，把所有的藥水(分母為 2、3、4、6、8、9、12) 拿出來，加入 1 張任意卡後，請每小隊的三號隊員幫老師洗均勻，並且四號隊員幫老師發給每個人(一樣多的放在正中間)，完成的小隊請雙手放在藥水上。</p> <p>T：接下來請剪刀石頭布決定遊戲順序，採逆時針進行，剩餘的藥水按照遊戲順序發下。 遊戲規則是：</p> <p>(1)手上若有 2 瓶藥水是相同大小的，就可以丟出來。</p> <p>(2)每回合可以丟 0~3 組(最多 6 瓶)藥水出來，並在丟出來的時候要唸出藥水上的分數才過關。</p> <p>(3)輪到下一位的時候可以抽下一位的 1 瓶藥水，再開始丟藥水出來。</p> <p>(4)輪到最後若每人皆剩一張，無法結束遊戲，就結算分數。</p> <p>※分數：不同品種的藥水(例如 <math>1/2+2/4</math>)得 3 分；相同品種的藥水(例如 <math>1/2+1/2</math>)得 2 分，剩餘的卡不得分。</p> <p>那現在大家開始正式的弗雷森變身術檢定！</p> <p>S：(檢定中)&gt;&gt;玩完第一局了</p>	<p>10 分鐘</p> <p>20 分鐘</p>	<p>小組合作、實作評量</p> <p>小組合作、實作評量</p>
<p>【統整活動】---重點歸納</p> <p>T：各位練習生，在成為正式生之前，我們要能找到所有相同的變身術藥水都配對在一起，請大家在桌面上將相同的藥水分在同一個區塊中喔，分完之後請小隊中的四五號，幫老師到下一個小隊去確認是不是都有排對，發現問題再舉手跟老師說。</p> <p>S：(四、五號到下一小隊確認；一~三號在小隊內介紹其他人)</p>	<p>5 分鐘</p>	<p>小組合作、口頭發表、實作評量</p>



# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量說明
<p>T：(巡視並針對分母為 9、12 的分數確認有沒有分類錯)</p> <p>第二節結束</p>		
<p>第三節開始</p> <p>【發展活動】——變身術檢定考當天</p> <p>T：今天，真是個風和日麗，適合檢定的日子！我們已經學會了比較、排序不同大小的藥水，前陣子又學會了分類相同大小的藥水，今天！我們就要來測試看看大家能不能通過弗雷森變身術的檢定囉！各位小小魔法師，你們想要挑戰看看嗎？</p> <p>S：想！</p> <p>T：好！現在請大家拿出 2 副完整的 51 張弗雷森藥水，再加入 1 張任意卡，並開始今天的檢定(請參照上一節課的遊戲規格)，並在結束後，將每人的得分以及「藥水配對卡」完成，放在桌上舉手後老師就知道你們結束囉！</p> <p>S：(學生進行遊戲)</p> <p>T：(老師巡視)</p> <p>【統整活動】——歸納</p> <p>T：哇！好多組都已經找到了！那你們可以跟大家分享，有哪些藥水 8/12 一樣多？</p> <p>S：三分之二</p> <p>S：六分之四</p> <p>(重複確認分母 12 以內的等值分數大家是否都找到)</p> <p>(引導學生找到以下的規律、而非宣告)</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{2}{3} = \frac{4}{6}</math> <p>2×2 3×2</p> </div> <div style="margin: 0 20px;">、</div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\frac{2}{3} = \frac{6}{9}</math> <p>2×3 3×3</p> </div> </div> <p>等等</p> <p>T：太厲害了！各位小小魔法師都完成了今天的變身術檢定！接下來，我們一起往更高深的魔法術前進吧！</p> <p>第三節結束</p>	<p>25 分鐘</p> <p>15 分鐘</p>	<p>小組合作、口頭發表、實作評量</p> <p>口頭發表、實作評量</p>

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式		時間
		評量說明
教學提醒	1. 需先進行至少一場《魔法佛雷森》初階版（八分牌卡） 2. 活動進行時，應先進行默契確認，不因牌卡而分心 3. 不需要強調學生理解牌卡上分數的意義，能理解規則、進行遊戲即可。 4. 最後再從量感進入分數，再進行到計算。	
參考資料		

# 玩數家族魔法弗雷森 教學活動設計

領域 / 科目	( 數學 )領域		設計者	玩數家族團隊
實施年級	第(二)學習階段		總節數	共(4)節，(160)分鐘
單元名稱	弗雷森衝浪手			
設計依據				
學習重點	學習表現	n-II-6 理解同分母分數的加、減、整數倍的意義、計算與應用。 認識等值分數的意義，並應用於認識簡單異分母分數之比較與加減的意義。	核心素養	●領綱 數-E-A1 具備喜歡數學、對數學世界好奇、有積極主動的學習態度，並能將數學語言運用於日常生活中。 數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學的關聯，並能嘗試與擬定解決問題的計畫。在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的運用。 數-E-C1 具備從證據討論事情，以及和他人有條理溝通的態度。 數-E-C2 樂於與他人合作解決問題並尊重 不同的問題解決 想法。
	學習內容	N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。		
教材來源		自編教材		
教學設備/資源		弗雷森牌卡 2 副 自製分數牆表 1 張 數學教具分數牆 3 份		
學習目標				
1. 認識等值分數 2. 應用等值分數的概念去認識簡單異分母分數 3. 比較簡單異分母分數，並理解加減的意義。				

## 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量方式
<p style="text-align: center;"><b>第一節開始</b></p> <p style="text-align: center;"><b>【準備活動】---閃靈快手</b></p> <p>(教室學生每 4 人 1 組，圍坐，桌上放置 3 份分數牆)</p> <p>T：各位小朋友，很高興這學期的弗雷森學院又要開課了！這次的弗雷森學院為大家準備了一個神祕的活動，等著各位學員參加！為了能解開學院大門的通關密語，這節課就讓我們慢慢暖身學習，召喚大家的魔法能力！現在每個小組桌上都有 3 份我們見過的”老朋友”。有沒有人可以告訴我，它的名稱是什麼？我們曾經在哪一個單元使用過它？</p> <p>S：分數牆，二年級上分數時有看過。</p> <p>T：你的記憶實在太好了！分數牆是很有趣、也很好玩的東西。我們現在要來進行一個閃靈快手的遊戲，請小組裡的兩個人一小組，一小組拿出一個分數牆。</p> <p>請拿到分數牆的小朋友，先把裡面的組件從盒子裡倒出來，混合。</p> <p>(學生兩人一組將分數牆倒出來等待)</p> <p>T：很好，所有小組都倒出來了，等一下老師倒數 321 後，請小朋友重新將分數牆組合回盒子裡，組完的就舉手，老師會記錄你們完成的順序。比賽 3 局，最後統計，哪兩個小朋友是今天最快的閃靈快手！準備好了嗎？預備，開始！</p> <p>(活動進行 3 次，老師在黑板上記錄學生的完成順序，結束後發表最後活動的成果。)</p> <p style="text-align: center;"><b>【發展活動】---尋找等值分數</b></p> <p style="text-align: center;">(教師在黑板張貼自製分數牆表)</p> <p>T：老師黑板上貼了一張跟你們剛剛組完的分數牆一樣組合的分數牆表。根據剛剛的經驗，請小組(4 人)，討論一下你們桌上的分數牆的組成內容，你們發現了甚麼？例如：不同顏色的長短條上標示了不同的分數，是什麼意思。3 分鐘後，我們先抽一組作主要報告，其他組再進行補充。(計時開始，教師巡視行間，觀察輔助學生討論)</p> <p>T：時間到，抽籤，好！看來是抽到最有勇氣的第 0 組，我們請第 0 組發表你們的觀察。</p> <p>S：我們這一組發現：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 分數牆上不同顏色的長條合起來都會是一樣長</li> <li>2. 第一條平分成兩半就會變成第二條、…(以此類推)</li> <li>3. 沒有分割的藍色上面標 1，代表完整一條；標示 <math>\frac{1}{2}</math> 的</li> </ol>	7 分鐘	口語評量、實作評量
<p style="text-align: center;"><b>【發展活動】---尋找等值分數</b></p> <p style="text-align: center;">(教師在黑板張貼自製分數牆表)</p> <p>T：老師黑板上貼了一張跟你們剛剛組完的分數牆一樣組合的分數牆表。根據剛剛的經驗，請小組(4 人)，討論一下你們桌上的分數牆的組成內容，你們發現了甚麼？例如：不同顏色的長短條上標示了不同的分數，是什麼意思。3 分鐘後，我們先抽一組作主要報告，其他組再進行補充。(計時開始，教師巡視行間，觀察輔助學生討論)</p> <p>T：時間到，抽籤，好！看來是抽到最有勇氣的第 0 組，我們請第 0 組發表你們的觀察。</p> <p>S：我們這一組發現：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 分數牆上不同顏色的長條合起來都會是一樣長</li> <li>2. 第一條平分成兩半就會變成第二條、…(以此類推)</li> <li>3. 沒有分割的藍色上面標 1，代表完整一條；標示 <math>\frac{1}{2}</math> 的</li> </ol>	20 分鐘	小組合作、口頭發表、實作評量

# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量方式
<p>紅色，要兩個放在一起，也就是 <math>2/2</math>，才能跟 1 條完整的 1，一樣長。…以此類推其他顏色。</p> <p>4. <math>1/2</math> 跟兩個 <math>1/4</math> 一樣多…</p> <p>T: 你們真是厲害的觀察家，分享的也真棒! 現在老師要邀請大家一起利用黑板上的分數牆表進行個人搶答。請問，如果 1 跟 2 個 <math>1/2</math> 合起來一樣多，請問 1 跟幾個 <math>1/3</math> 合起來一樣多? 幾個 <math>1/4</math>? 幾個 <math>1/5</math>?... (以此類推完成分數牆的所有提問)</p> <p>S: 3 個、4 個...(以此類推)，12 個。</p> <p>(教師在延伸布題、答案回饋的同時，在黑板的分數牆表旁依照學生答題的順序寫下 <math>1=2/2=3/3\cdots=12/12</math>)</p> <p>T: 你們實在太厲害了! 那如果不是 1，也會找到一樣多的數量嗎? 請小朋友根據你們手上的分數牆，找找看 <math>1/2</math> 跟那些分數一樣大?</p> <p>S: <math>2/4</math>、<math>3/6</math>、<math>4/8</math>、<math>5/10</math>、<math>6/12</math></p> <p>(教師在黑板上寫出學生的答案 <math>1/2=3/6=4/8=5/10=6/12</math>)</p> <p>T: 你怎麼知道它們一樣大?</p> <p>S: 因為排起來一樣多</p> <p>T: 很好! 在數學上，像這樣 <math>1/2=3/6=4/8=5/10=6/12</math>，數量一樣多，卻分法不同的分數，我們稱他們為”等值分數”。</p> <p>T: 請問 <math>1/2</math> 還有其他的等值分數嗎? 想想看，如果有，請幫大家舉個例子。</p> <p>S: 有，<math>10/20</math>，因為都是一半。</p> <p>T: 如果不是用排的、用切的，你有辦法找到答案嗎? 有沒有小朋友開始發現，這些等值分數中間，分母和分子的變化有一些規律?</p> <p>S: 有! 他們有倍數關係。</p> <p>T: 太棒了! 所以，如果我今天如果分母變成切成 14 份，<math>1/2</math> 就會變成?</p> <p>S: <math>7/14</math></p> <p>T: 太厲害了! 請小組討論一下，<math>1/2</math> 還有沒有其他的等值分數，請利用小白板寫出你們的答案。沒有就寫沒有，如果覺得還有的，請把你們能想到、推理到的 <math>1/2</math> 等值分數寫出來，並練習說出理由。3 分鐘後我們進行小組發表。</p> <p>S: 有，只要用倍數關係的方式，分子分母都同乘相同倍數</p>	10 分鐘	小組合作、口頭發表、實作

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量方式
<p>就可以找到無限個。</p> <p>【統整活動】---重點歸納</p> <p>T:我們今天透過了分數牆學習到了等值分數的概念，也知道要找到等值分數不一定需要用排的、用畫的，是可以用數學的規律找到。現在請小朋友想想今天的學習內容，完成發下的學習單後下課。</p> <p>(教師視情況指定大題現場完成並批閱，做個別指導；未完成的部份當作回家作業)</p> <p>第一節結束</p>	3 分鐘	<p>評量</p> <p>學習單</p>
<p>第二節開始</p> <p>【準備活動】---通關密語</p> <p>T:小朋友，終於到了我們這學期弗雷森學院的開學日!要打開魔法學院的大門，要說出一個通關密語。這一次的通關密語就是我們上一節利用分數牆學到了一個數學名詞”等值分數”。有沒有哪一個小朋友可以說出什麼是等值分數或舉出例子，帶我們順利開門、進入學院?</p> <p>S:”等值分數”就是指數量一樣多的分數，可以用不同的分數寫法來表示，例如:<math>1/4=2/8</math></p> <p>T:太棒了!門開了!各位學員，歡迎各位來到弗雷森學院，很久不見，我們先來點簡單的魔法練習!</p> <p>【發展活動】---弗雷森檢定考</p> <p>(教師張貼分數牆)</p> <p>T:弗雷森學員們，請問 <math>2/8</math> 和 <math>3/8</math>，哪一個數字比較大?搶答前，要先想好你的原因。</p> <p>S:<math>3/8</math>，因為比 <math>2/8</math> 多了一個 <math>1/8</math></p> <p>T:太棒了!說的真好!小心了!我要出招了!<math>1/4</math> 跟 <math>3/8</math> 哪一個比較大呢?為甚麼?</p> <p>S:<math>3/8</math>，因為 <math>1/4</math> 是 <math>2/8</math> 的等值分數，所以小於 <math>3/8</math>!</p> <p>T:怎麼這麼強!再來一題挑戰題!請問 <math>3/4</math> 跟 <math>5/8</math> 哪一個比較大?為什麼?小組討論 3 分鐘，等一下我們抽一組發表。</p> <p>S:<math>3/4</math>，可以透過找到 <math>3/4</math> 的等值分數 <math>6/8</math>，跟 <math>5/8</math> 進行比較。</p> <p>T:好厲害的魔法師們!現在請魔法師們以小組為單位進行”等值分數”的技能檢定!現在老師將公布檢定題，請</p>	<p>5 分鐘</p> <p>30 分鐘</p>	<p>口頭發表</p> <p>小組合作、口頭發表</p>



教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	時間	評量方式
<p>你們小組討論，並將答案寫在白板上。我們一起公布。通過檢定的魔法師，下一節就可以參加今年的弗雷森衝浪比賽!計時 5 分鐘，開始!</p> <p>(教師公布小組挑戰題，約 10 題，以小組為單位，將答案寫在白板上，完成後拿到教室前方共同發表、檢討)</p> <p><b>【統整活動】---重點歸納</b></p> <p>T:太棒了!各位魔法師，看到大家都能把答案寫出來，並完成檢定。今天透過檢定，老師發現大家都能利用等值分數的觀念，比較不同分母的分數大小，請各位魔法師回家多練習，下一堂課，我們即將要進行弗雷森衝浪賽!</p> <p>第二節結束</p>	5 分鐘	
<p>第三、四節開始</p> <p><b>【暖身活動】---密技練功房</b></p> <p>T:歡迎大家一起參加今年弗雷森學院舉辦的衝浪比賽。讓我們透過”弗雷森衝浪”，找出最厲害的分數高手!進行衝浪之前讓我們先進行暖身活動---密技練功，幫你的大腦暖機。</p> <p>(教師在每組桌上的教具籃中發下 3 份數學分數牆)</p> <p>T:請每組打開 3 組分數牆，先拿出深藍色完整的 1。請用不同的分母分數(不同顏色)，接出完整的 1 條，順序不同，算同一種組合。排排看，可以找出幾種分式。等等跟其他組分享你們找到的方式。</p> <p>S:<math>1=1/2+1/4+1/4</math>、<math>1=1/4+1/4+1/4+1/8+1/8\cdots</math>(以此類推，只要長度為 1，總和為 1，就算成功)</p> <p>T:太厲害了!剛剛式拼起來總合 1，現在進行進階挑戰。請拿出兩條完整 1，拼合在一起，變成二。請小組合作，用不同的組合，排成長度為 2 的組合。排出越多種越好。計時開始!</p> <p>S:<math>2=1/3+1/3+1/3+1/3+1/3+1/6+1/6</math>(只要能排成長度 2、總和 2 就過關)</p>	15 分鐘	小組合作、口頭發表、實作評量
<p><b>【發展活動】---弗雷森衝浪手(請參考遊戲規則)</b></p> <p>T:好!暖身結束!各位弗雷森學員，請將每組桌上的 3 條完整 1 拿出來拼在一起，變成弗雷森浪潮!今天真是個合適衝浪的日子!浪高從 1(一條深藍 1)到 2(二條深藍 1)到</p>	30 分鐘	實作評量

# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量方式
<p>3(三條深藍 3)都是各位學員衝浪的挑戰!衝浪過程中，選手們將依照手牌的分數大小放置分數牆較具到正確的位置，為了加速衝浪的速度，今天的分數牆只能使用分母為 2、4、8、12 的物件。</p> <p>(教師參照”弗雷森衝浪手”遊戲規則，說明遊戲方式)</p> <p>T:請每組拿出 2 副弗雷森手牌，將其中分母 9 的手牌抽走。接下來請遵守以下遊戲說明:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 請每個衝浪手從牌堆中抽出一張牌比大小，牌卡代表數量最大的學員成為第一個衝浪手，遊戲以順時針順序進行。</li> <li>2. 剩下的牌卡洗勻後進行發牌，每位衝浪手手上擁有 5 張手牌，手牌上的分數數量越大代表的浪高愈高。</li> <li>3. 將分數牆中的 3 條 1 連接成一條，成為弗雷森浪高板，放置在玩家中央。</li> <li>4. 由第一位衝浪手開始出牌(第一次出牌不可以出數量為 1 的牌卡)，並放置相對應的分數牆在浪高板上，使浪高越來越高，形成”漲潮”。下一位衝浪手放置的分數牆往浪高點 2 前進。</li> <li>5. 遊戲中，所有衝浪手依順序進行出牌、放置分數牆數量在浪高板上的動作。當放置的分數牆數量超出 2 的浪高點，弗雷森浪潮就會開始”退潮”，下一位玩家就要依出的手牌數量拿早相對應的分數牆數量;當浪潮退到比 1 小的浪高點，下一位衝浪手就要開始面臨”漲潮”，要依據出的手牌數量大小將對應的分數牆數量堆疊到弗雷森浪高上，重新向最高浪高點 3 的方向前進。</li> <li>6. 遊戲進行中，衝浪手若能將分數牆放置在 1 或 2 的浪高點上，就是贏家!</li> </ol> <p>(學生依照遊戲規則開始對戰，過程中，教師行間巡視，並給予協助，並視大部分組別第一局結束時，先行暫停，並在黑板貼出弗雷森浪高版，準備進行討論)</p> <p>【統整活動】——衝浪密技討論</p> <p>T:太厲害了!看來大家已經會衝浪了!也找到第一次的衝浪高手!現在讓我們來想一想、討論一下，他們是怎麼做到的?</p> <p>T:請問 <math>\frac{3}{4}</math> 和 <math>\frac{7}{12}</math> 的手牌哪一張代表的浪高比較高?為什麼?</p>	15 分鐘	口頭發表

# 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	評量方式
<p>S: <math>3/4</math>, 因為運用等值分數的概念 <math>3/4</math> 可以等值 <math>9/12</math>, <math>9/12</math> 大於 <math>7/12</math></p> <p>T: (教師指向浪高 1) 第一位衝浪手因為被規定第一次不能放 1, 請問他可能最靠近浪高 1 的手牌是甚麼?</p> <p>S: <math>11/12</math></p> <p>T: 如果他放的是 <math>3/4</math>, 第二位衝浪手放了哪一個分數就會贏? 為什麼? 可以用數學算式來說明嗎?</p> <p>S: <math>1/4</math>, 因為 <math>3/4 + 1/4 = 1</math></p> <p>T: 還有其他的答案嗎? 為什麼?</p> <p>S: <math>2/8</math>, 因為 <math>2/8</math> 是 <math>1/4</math> 的等值分數, 他們代表的分量一樣多, 所以加起來一樣等於 1。</p> <p>T: 你上一個衝浪手的浪高是 <math>2 \text{ 又 } 2/4</math>, 請問你出了 <math>3/8</math>, 你的浪高會停留在多少? 可以用數學算式解釋給我們聽嗎?</p> <p>S: <math>2 \text{ 又 } 1/8</math>, 浪潮超過了 2, 所以要開始”退潮”, 不能加上去, 浪高要減少. 因為等值分數 <math>2/4 = 4/8</math>, 所以最後的浪高是 <math>2 \text{ 又 } 4/8 - 3/8 = 1/8</math></p> <p>T: 大家都太棒了! 相信透過剛剛的討論, 各位衝浪手的技巧又更進一步了! 距離下課還有一點時間, 我們再玩一局! 鐘響後, 各組可以決定是否繼續玩到遊戲結束再將卡牌回到老師的手上, 記得完成今天的”弗雷森衝浪手”學習單, 並且將今天玩到的相關心得和密技, 寫進去。</p> <p style="text-align: center;">(再玩一局)</p> <p style="text-align: center;">—第三、四節課結束—</p>	20 分鐘	實作評量 學習單

## 推倒弗雷森

弗雷森魔法大賽開始了!這次參加對戰的魔法師都能使用魔法藥水變出城牆、組成自己的堡壘!要成為對戰中最厲害的魔法師就是要能猜對對方藥水屬性、發動攻擊、推倒其他魔法師的堡壘!快快快!聰明的弗雷森魔法師們，你們準備好了嗎?快來推倒對手的堡壘、成為最強的弗雷森魔法師吧!

獲勝方式:遊戲最後仍有弗雷森牌座的玩家，就是贏家!

玩家人數:2-4 人

遊戲道具:

1. 牌卡:手牌(藍卡 10 張、綠卡 10 張)、懲罰卡(黑卡 30 張)
2. 弗雷迅牌座:二分牌座 8 個、四分牌座 12 個、八分牌座 8 個

## 推倒小小弗雷森(無黑卡版)

建議年級:一、二年級

(四個玩家為例)

1. 遊戲開始前，每個玩家手持八分牌座 4 個。
2. 將手牌(不含任意卡)洗牌後，顏色部分朝上，分量圖示朝下，放置在桌子中央。
3. 玩家猜拳，由贏的玩家先開始，一次拿 4 張(不分藍綠)，順時鐘輪流拿手牌，剩卡放置在旁。
4. 拿到手牌後，玩家依據牌卡上顯示的份量，選擇想使用的弗雷迅卡座，將卡放入八分卡座並放置在自己的面前。
5. 玩家手中的弗雷迅牌座，按照分量圖示從少到多排序、左到右排放。
6. 第一位玩家選擇任一玩家發動推倒攻擊。玩家需指著對手其中一個牌座，說出正確的對應數量，攻擊成功(猜測成功)即可推倒對手玩家的牌座，並可選擇繼續攻擊(可攻擊同一玩家或換攻擊其他玩家)或選擇停止攻擊，換下一家玩家攻擊；若攻擊失敗(猜測錯誤)，則需選擇推倒自己一張卡座(亮牌)，為其他玩家提供判斷訊息。
7. 玩家依序發動攻擊，推倒場上的對手手牌，遊戲最後仍持有弗雷迅卡座的玩家獲得最後勝利!

## 推倒小小弗雷森(黑卡加任意卡版)

建議年級:一、二年級

(四個玩家為例)

1. 遊戲開始前，每個玩家手持八分牌座 5 個。
2. 將手牌(藍綠卡含任意卡，共 20 張)洗牌後，顏色部分朝上，分量圖示朝下，放置在桌子中央。
3. 黑卡洗牌後備用。
4. 玩家各抽一張黑卡，由分量多的玩家開始一次拿 5 張(不分藍綠)，順時鐘輪流將牌卡拿完。
5. 拿到手牌後，玩家依據牌卡上顯示的份量，選擇想使用的弗雷迅卡座，將卡放入八分卡座並放置在自己的面前。
6. 玩家手中的弗雷迅牌座，按照分量圖示從少到多排序、左到右排放。
7. 第一位玩家選擇任一玩家發動推倒攻擊。玩家需指著對手其中一個牌座，說出正確的對應數量，攻擊成功(猜測成功)即可推倒對手玩家的牌座，並可選擇繼續攻擊(可攻擊同一玩家或換攻擊其他玩家)或選擇停止攻擊，換下一家玩家攻擊；若攻擊失敗(猜測錯誤)，則需由懲罰卡中抽一張黑卡，將黑卡依份量顯示，朝上放置在自己的弗雷迅牌座中，為其他玩家提供判斷訊息。不同顏色、同樣份量下，黑卡為最小，需擺在最左邊，如:黑 1/2、藍 1/2、綠 1/2
8. 玩家依序發動攻擊，推倒場上的對手手牌，遊戲最後仍持有弗雷迅卡座的玩家獲得最後勝利!

## 推倒弗雷森X:

建議年級:三年級以上

(四個玩家為例)

1. 遊戲開始前，每個玩家各手持二分牌座 2 個、四分牌座 3 個、八分牌座 4 個。
2. 將手牌(藍卡、綠卡、任意卡，共 20 張)洗牌後，顏色部分朝上，分量圖示朝下，放置在桌子中央。
3. 黑卡洗牌後備用。
4. 玩家各抽一張黑卡，由分量多的玩家開始一次拿 5 張(不分藍綠)，順時鐘輪流將中央手牌拿完，。
5. 拿到手牌後，玩家依據牌卡上顯示的份量，選擇想使用的弗雷迅卡座，將卡放入並放置在自己的面前。如玩家拿到份量圖示 1/2 的份量卡可選擇放置入在二分卡座、四分卡座、八分卡座其中一個，混淆對手玩家；若抽到任意卡可放入任意卡座。

6. 玩家手中的弗雷迅牌座，按照分量圖示從少到多排序、左到右排放。同分量卡座的牌座，則需將藍牌放左(少)、綠牌放右(多)。如: 玩家整理手持牌後從左(少)到右(多)顯示，藍 1/4、綠 1/2、(藍 2/4、藍 5/8)、綠 3/4
7. 任意卡卡座可代表任何分量，玩家可放在任意位置，混淆對手玩家。
8. 第一位玩家選擇任一玩家發動推倒攻擊。玩家需指著對手其中一個牌座，說出正確的對應數量，攻擊成功(猜測成功)即可推倒對手玩家的牌座，並可選擇繼續攻擊(可攻擊同一玩家或換攻擊其他玩家)或選擇停止攻擊，換下一家玩家攻擊；若攻擊失敗(猜測錯誤)，則需由懲罰卡中抽一張黑卡，將黑卡依份量顯示，朝上放置在自己的弗雷迅牌座中，為其他玩家提供判斷訊息。不同顏色、同樣份量下，黑卡為最小，需擺在最左邊，如: 黑 1/2、綠 1/2、藍 1/2
9. 玩家依序發動攻擊，推倒場上的對手手牌，遊戲最後仍持有弗雷迅卡座的玩家獲得最後勝利！

## 魔法合一數

弗雷森魔法世界的牌卡被封印了！快施展解救弗雷森的牌卡世界！

### 魔法合一數·練功房

練功裝備: 弗雷森分數牌卡一副(51 張分數牌卡+3 張任意卡)、卡牌座每人 1 座  
練功人數: 2-6 人(推薦 4 人、6 人)

密技: 魔法合一數

起手式:

1. 玩家每人一個卡牌座
2. 將卡牌中的任意卡抽出 2 張，剩下的 1 張和 51 張分數牌卡洗均勻、分數牌能表示數量的顏色面朝上，放置在所有玩家的中間
3. 玩家可將牌卡放入卡牌座中，裡用卡牌座進行顏色的累積比對，只要兩張牌卡上的顏色區塊能滿一張(集滿卡牌座的所有刻度量)，就算完成一次「魔法合一數」的練習，並將牌卡釋放後，放置在自己的身邊。
4. 完成一次的「魔法合一數」後，可持續練習，直到中間放置的牌卡都被釋放。
5. 遊戲結束，能利用「魔法合一數」釋放越多張牌卡的玩家，功力越厲害。

### 魔法合一數·PK 賽

遊戲裝備: 弗雷森分數牌卡一副(51 張分數牌卡+3 張任意卡)

玩家人數: 2-6 人(推薦 4 人、6 人)



遊戲規則：

1. 牌卡洗勻後，玩家們任抽一張，由牌卡顯示的顏色量最多的玩家擔任莊家。
2. 莊家將牌卡洗勻後，莊家從 6 自己開始，順時針發牌，直到牌卡發完。
3. 玩家先檢視自己手上的牌卡，進行「魔法合一數」及釋放牌卡的動作。
4. 從莊家開始，順時針的向下一家玩家進行抽一張牌。
5. 玩家抽取到的牌卡，若能跟手上持有的牌卡進行「魔法合一數」，亦可進行釋放牌卡的動作。
6. 遊戲持續進行，能將擁有的牌卡完全釋放出去的玩家，即是贏家。

弗雷森特殊技能說明：

#### 「魔法合一數」

1. 任兩張牌卡上的顏色量，若能組合為完整的一張，即完成「魔法合一數」，這兩張牌卡就可以被釋放。  
如：標示為  $1/4$  的牌卡可以跟  $3/4$ 、 $6/8$ 、 $9/12$  的牌卡進行合一數及釋放。
2. 手牌中的任意牌，可以擔任任何數量的分數牌卡，與其他分數牌進行「魔法合一數」的動作，只要完成合一數，也可以被釋放。如：任意牌+(任一張分數牌卡)或 任意牌+任意牌，都可被釋放。

## 弗雷森衝浪手

弗雷森學員集合！這次學員們在弗雷森海域進行密技特訓、挑戰衝浪！在浪起、浪落的弗雷森海域，究竟誰能展現技巧、站在整數的浪頭，成為最厲害的衝浪手？快拿起弗雷森的手牌，勇於挑戰吧！

人數設定：2-6 人

遊戲裝備：

1. 弗雷森牌卡二副
2. 分數牆展示表 一張
3. 分數牆 3 份

遊戲規則：

1. 將弗雷森牌卡中分母為 3、6、9 的牌卡移除
2. 每位玩家從牌堆中抽出一張牌比大小，擁有牌卡代表數量最大的玩家成為莊家(起始玩家)，遊戲以順時針順序進行。
3. 剩下的牌卡洗勻後進行發牌，每位玩家手上擁有 5 張手牌。
4. 將分數牆中的 3 條 1 連接成一條，成為弗雷森浪高板，放置在玩家中央。
5. 由起始玩家開始出牌(第一次出牌不可以出數量為 1 的牌卡)，並放置相對應的分數牆在浪高板上。

6. 依序進行出牌、放置分數牆數量在浪高板上的動作，當放置的分數牆數量超出 2 的浪高點，弗雷森浪潮就會開始退潮，下一位玩家就要依出的手牌數量拿早相對應的分數牆數量；當浪潮退到比 1 小的浪高點，下一位玩家就要開始面臨漲潮，要依據出的手牌數量大小將對應的分數牆數量堆疊到弗雷森浪高上，重新向最高浪高點 3 前進。
7. 遊戲進行中，玩家若能將依出的手牌數量將分數牆放置在 1 或 2 的浪高點上，就成為贏家。

# 109 學年度臺中市中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：圓的異心同徑猜想與探究

關 鍵 詞：圓周、三角形、邊角關係（最多 3 個）

編 號：

製作說明：

1.說明書封面僅寫類別、科別、組別、作品名稱及關鍵詞。

2.編號：(由承辦學校統一編列)。

3.封面編排由參展作者自行設計。



# -圓的異心同徑猜想與探究-

## 摘要

課堂中為了畫出老師指定的多邊形，在一定條件之下，我們可以用圓規來取代量角器，也可以畫出指定的多邊形。讓我們感到有趣的是，這些圓所交織出的交點，除了能畫出指定多邊形外，其他的交點是否具有一些特別的性質呢？讓我們感到好奇。

我們以三角形為基礎，以其邊長為直徑或半徑來畫出一些圓形，這些圓周長所相交的點，和原來的三角形有何相關性？具備了哪些特性或規律？是研究的主題。繪圖、測量、記錄和觀察是一個繁複煩雜的歷程，因此，我們藉助資訊軟體來幫助我們進行探究。

結果我們發現，交點和初始三角形並未有直接關係，但交點與圓具有一些特質值得應用；而有些情形受限於時間是我們未能注意到的，但仍值得我們再去探索。

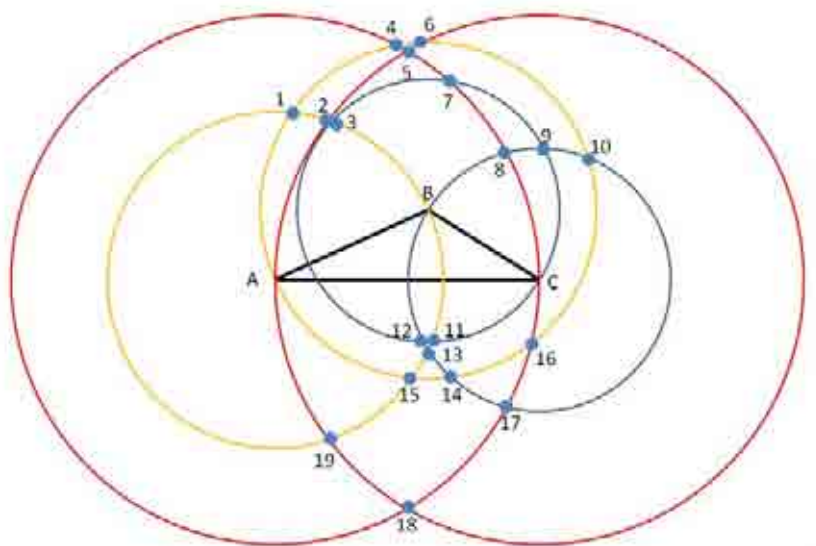
## 壹、研究動機

在線對稱的課程時，老師提出了一個很有趣的問題。之前在學習畫三角形時，任意三角形只要先選擇、點出三個頂點，然後將頂點間連出直線，就可以畫出三角形；另外，如果要畫出直角三角形，那就先畫出一個直角，然後在它的兩個邊各任點一個點，再將這兩個點連接起來就可以形成一個直角三角形；那如果要畫出指定邊長的三角形呢？我們可以先畫一條指定長度的線段，舉例來說，我們要畫一個邊長為 6 公分、7 公分、8 公分的三角形，我們可以先在紙上畫出一個 8 公分的線段，然後再用圓規，分別以這條線段的兩頭作為圓心，6 公分和 7 公分作為半徑，在上面畫出兩個圓，這兩個圓周會相交出來二個交點，然後任選其中一個交點，再和剛剛的兩個圓心連線，就可以畫出指定的邊長為 8 公分、7 公分、6 公分的三角形了；而另外一個沒被選到的點呢？用相同的方法一樣可以再畫出一個三角形，而且這兩個三角形剛剛好是線對稱圖形喔！

所以，老師給了我們一個思考的問題，如下圖，上面有六個圓形，相交出許多個點，哪些點可以協助我們畫出這個三角形的「線對稱圖形」呢？

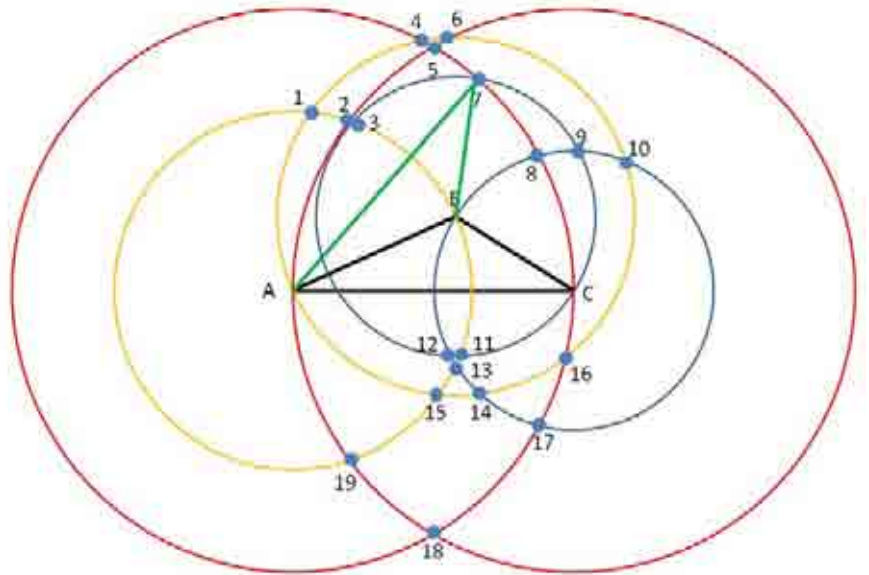
~動動腦時間~

有一個三角形 ABC，紅色的圓是各以點 A 和點 C 為圓心、AC 長為半徑所畫出來的；黃色的圓是各以點 A 和點 B 為圓心、AB 長為半徑所畫出來的；藍色的圓是各以點 B 和點 C 為圓心、BC 長為半徑所畫出來的；這些圓相交出來的 18 個點，哪幾個點可以讓我們找到三角形 ABC 的線對稱三角形呢？

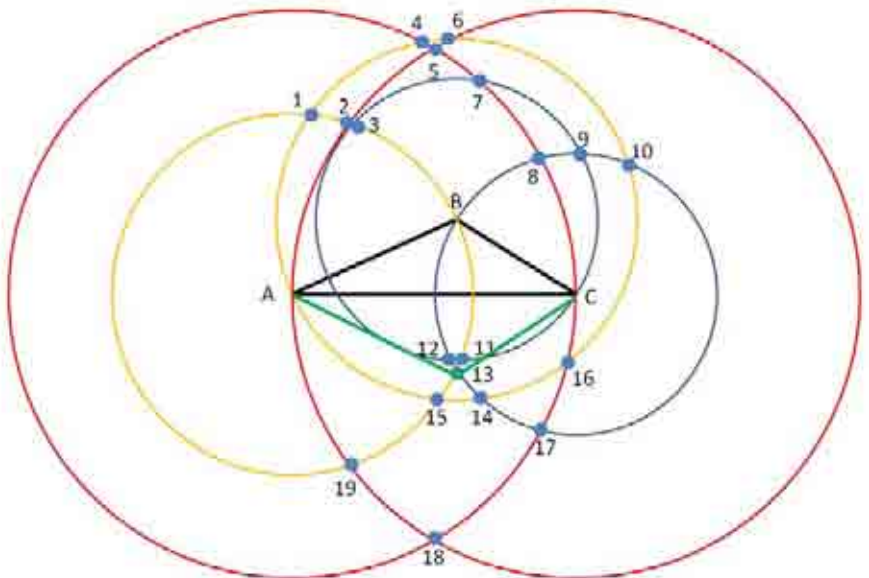


答案是「6」、「7」和「13」，您答對了嗎？

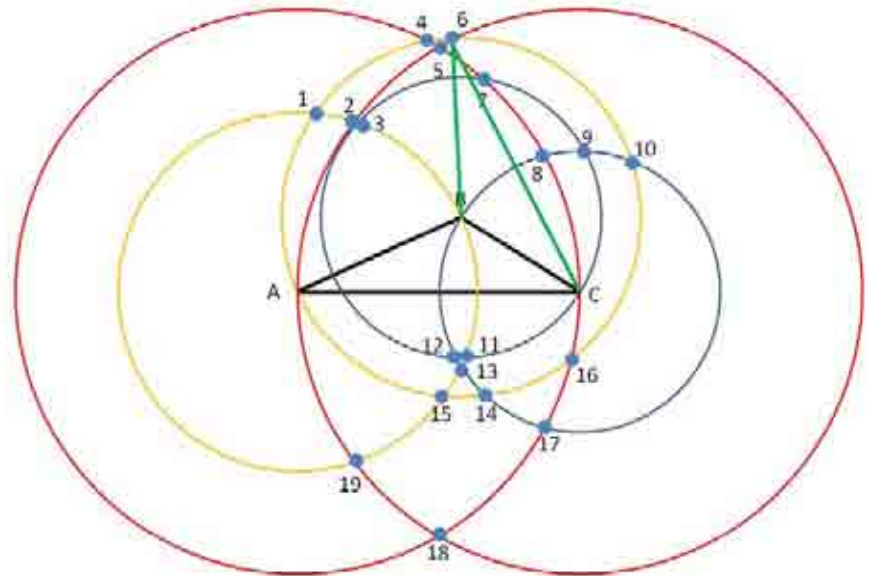
以 AB 為對稱軸  
三角形 A-B-C  
和  
三角形 A-B-7



以 AC 為對稱軸  
三角形 A-B-C  
和  
三角形 A-13-C



以 BC 為對稱軸  
三角形 A-B-C  
和  
三角形 6-B-C



老師給的這個問題讓我們覺得很有趣，讓我們在製作對稱圖形上不一定要靠方格紙、百格板就可以進行繪製。了解原理後，我們從盲猜，到有原理的追跡，學得更有意義了！

更讓我們有興趣的是，其他交織出的交點，也都是有「根據」的交點，那這些交點會不會有一些性質存在呢？這些性質跟原來的三角形有沒有什麼相關存在？真是令人好奇。

## 貳、研究目的

因此，我們想嚐試找出一些作圖上的規律

1.運用三角形各邊長為直徑時所繪製的圓形，三個圓所形成的交點，對於原三角形有無相關性質存在？

2.運用三角形各頂點為圓心，各邊長為半徑所繪製的圓形，六個圓所形成的交點，對於原三角形有無相關性質存在？

## 參、研究設備及器材

以老師給我們的挑戰，隨意一個三角形所構成的圓形交點就有 19 個，如果隨便取 3 個點來組成一個三角形，那就會有  $19 \times 18 \times 17 = 5814$  種排列情形，也大概有  $5814 \div 6 = 969$  種組合；如果每個三角形要測量 3 個邊長的長度和 3 個內角的角度，那就有 5814 次測量過程，每次 1 分鐘，那就要 5814 分鐘，也就是大約 100 個小時才能畫完，也容易發生有畫錯、漏畫的可能。因此，使用電腦來繪圖會是一個比較好的作法，也容易修改；另外，在測量的部份，老師也推薦我們使用一套叫「阿嬤」的軟體，它是可以附加在簡報軟體 PowerPoint 的套件，只要指定正確線段就會出現我們想測量的結果；最後，為了發現是否在長度、角度上有規律可循，我們是使用 Excel 來協助記錄和分析。因此，我們使用了以下的軟體：

一、Microsoft PowerPoint 教育版

二、Microsoft Excel 教育版

三、AMA 2.1 測式版（2019 交通大學 Activate Mind and Attention 計畫）

## 肆、研究過程或方法

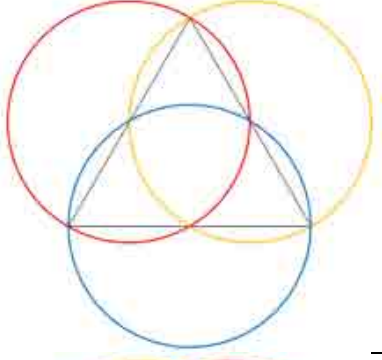
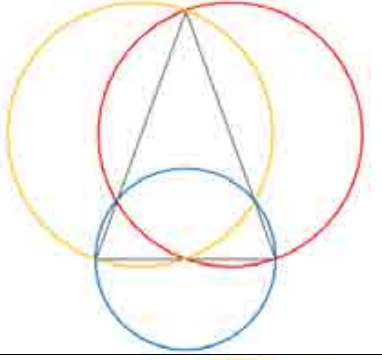
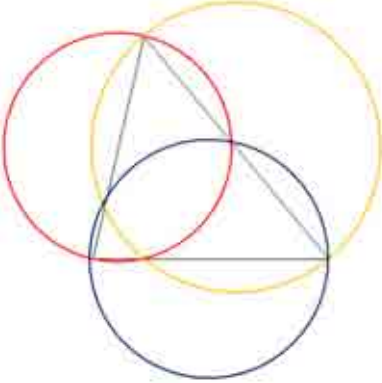
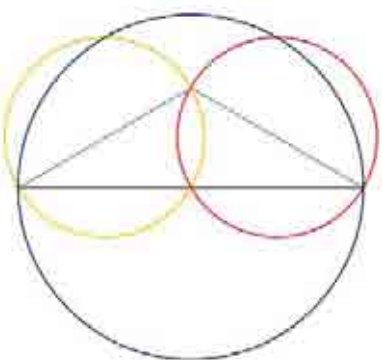
以三角形來研究，大概有銳角三角形、鈍角三角形、直角三角形等三種類型，如果又加上邊長的關係，又可再分為三邊等長、其中二邊等長及皆不等長等類型。我們就以這些類型進行繪圖，嚐試從圖形、角度、長度等變化來觀察交點所形成的性質。

一、以三角形每邊邊長為直徑所畫出的圓，它們的圓周交點性質分析

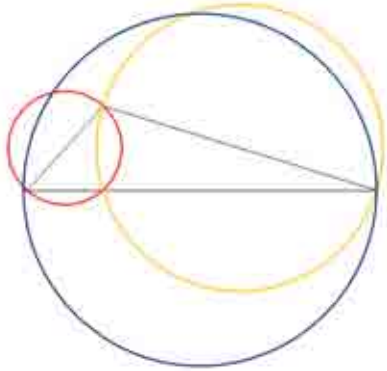
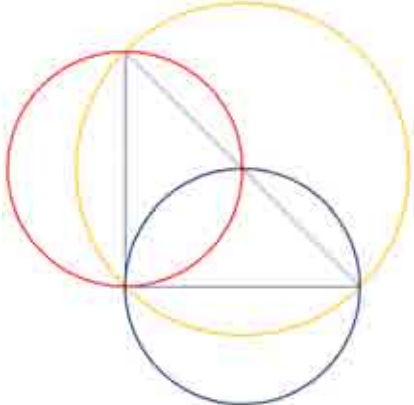
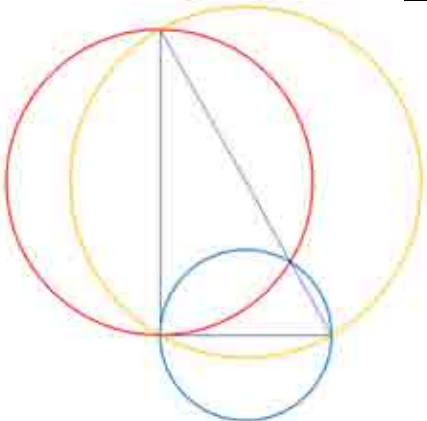
二、以三角形三個頂點為圓心，再以邊長為半徑所畫出的圓，它們的圓周交點性質分析。

## 伍、研究結果

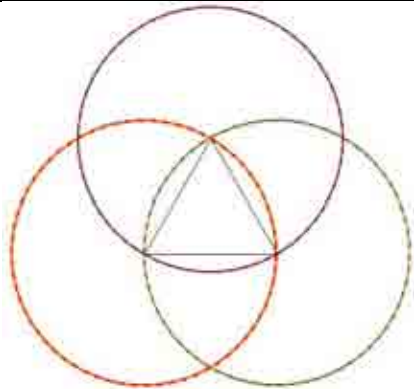
### 一、以三角形每邊邊長為直徑所畫出的圓，它們的圓周交點性質分析

以角度分	以邊長分類	繪圖結果
銳角三角形	三邊等長（正三角形）	
	二邊等長（等腰銳角三角形）	
	三邊不等長（銳角三角形）	
鈍角三角形	二邊等長（等腰鈍角三角形）	

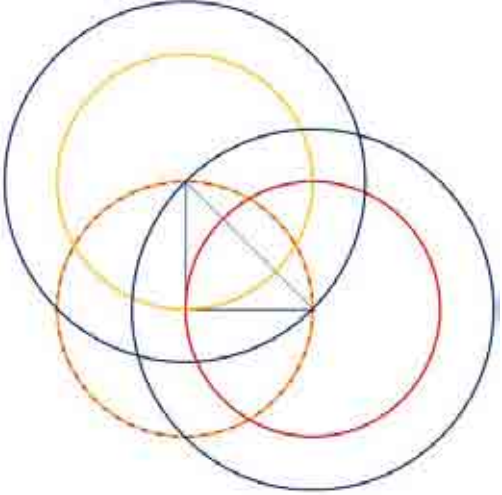
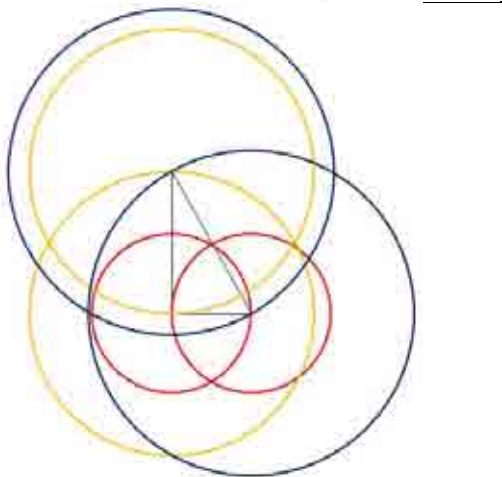


	三邊不等長（鈍角三角形）	
直角三角形	二邊等長（等腰直角三角形）	
	三邊不等長（直角三角形）	

二、以三角形三個頂點為圓心，再以邊長為半徑所畫出的圓，它們的圓周交點性質分析。

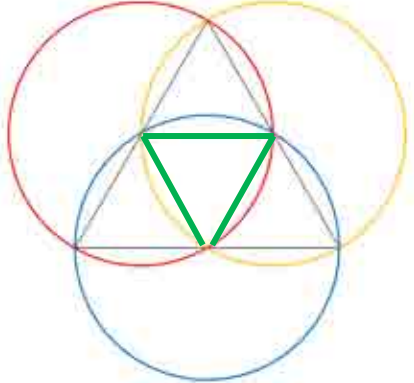
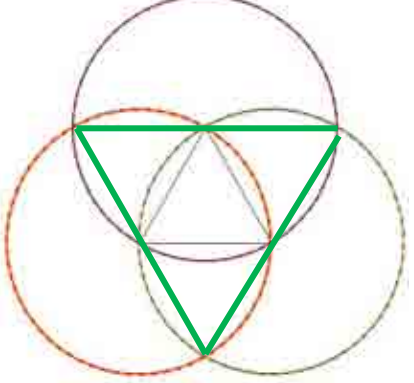
以角度分	以邊長分類	繪圖結果
銳角三角形	三邊等長（正三角形）	

	二邊等長（等腰銳角三角形）	
	三邊不等長（銳角三角形）	
鈍角三角形	二邊等長（等腰鈍角三角形）	
	三邊不等長（鈍角三角形）	

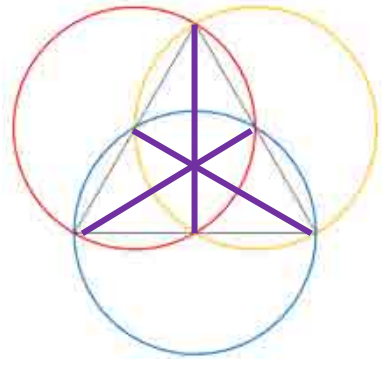
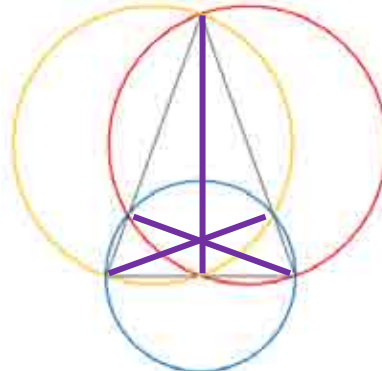
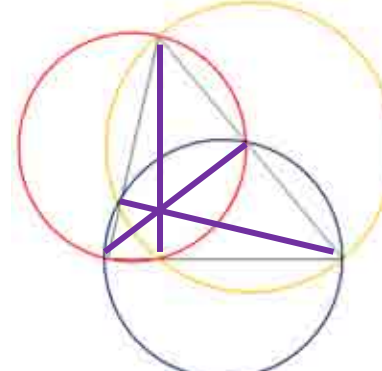
<p>直角三角形</p>	<p>二邊等長（等腰直角三角形）</p>	 <p>A geometric diagram showing an isosceles right triangle inscribed in a circle. The triangle is formed by three points on the circle's circumference. The circle is colored blue. Two other circles, colored yellow and red, are tangent to the triangle's sides and the blue circle. The triangle's vertices are marked with dots, and its sides are drawn as black lines.</p>
	<p>三邊不等長（直角三角形）</p>	 <p>A geometric diagram showing a scalene right triangle inscribed in a circle. The triangle is formed by three points on the circle's circumference. The circle is colored blue. Two other circles, colored yellow and red, are tangent to the triangle's sides and the blue circle. The triangle's vertices are marked with dots, and its sides are drawn as black lines.</p>

## 陸、討論

### 發現一、正三角形畫圓

邊為直徑畫圓	邊為半徑畫圓
	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 畫出三個圓。</li> <li>2. 兩個圓交會出新的一點。</li> <li>3. 將新交點連接起來，是一個較小的正三角形。</li> <li>4. 新正三角形是原來的正三角形的縮小圖。</li> <li>5. 新正三角形是原來的正三角形的二分之一縮小圖。</li> <li>6. 新正三角形面積是原來的正三角形的四分之一。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 畫出六個圓，其中二個二個重疊，最後也是出現三個圓。</li> <li>2. 兩個圓交會出新的一點。</li> <li>3. 將新交點連接起來，是一個較大的正三角形。</li> <li>4. 新正三角形是原來的正三角形的放大圖。</li> <li>5. 新正三角形是原來的正三角形的2倍放大圖。</li> <li>6. 新正三角形面積是原來的正三角形的四倍。</li> </ol>

### 發現二、銳角三角形畫圓

三邊等長，直徑畫圓	二邊等長，直徑畫圓	三邊不等長，直徑畫圓
		
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 三個交點都在邊上。</li> <li>2. 交點和對面頂點連線和其中一邊都是垂直。</li> </ol>		

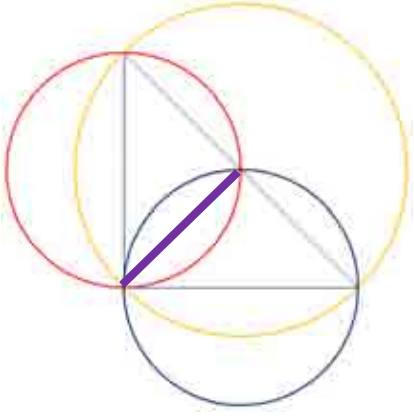
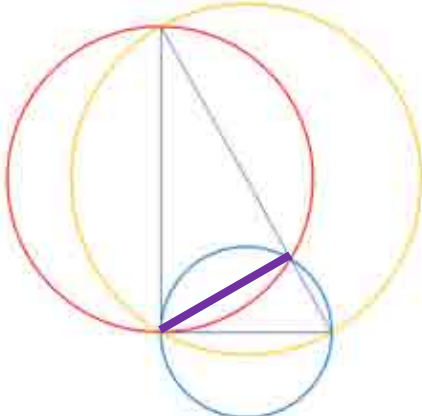
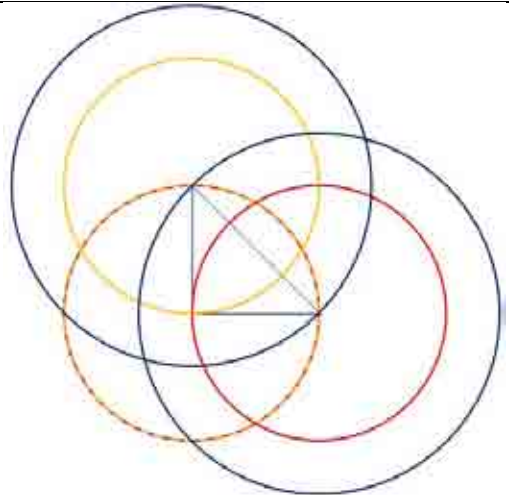
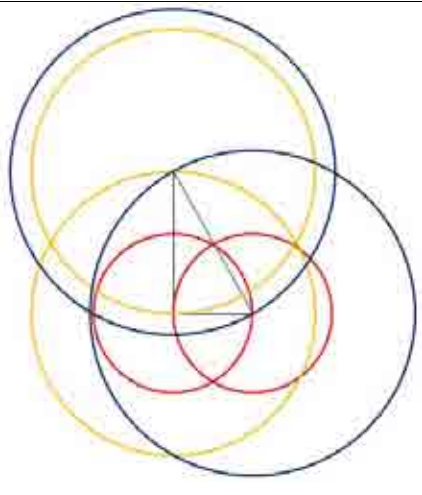
三邊等長，半徑畫圓	二邊等長，半徑畫圓	三邊不等長，半徑畫圓
1. 三邊等長，圓會重疊；二邊等長，只有一組圓會重疊。 2. 都是同心圓。 3. 邊長差異愈大，兩個同心圓的差異就愈大。 4. 交點太多，看不到規律。		

### 發現三、鈍角三角形畫圓

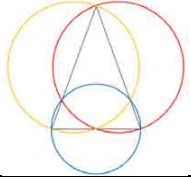
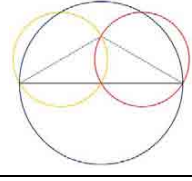
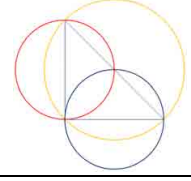
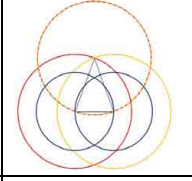
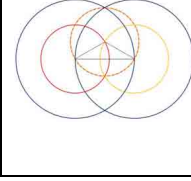
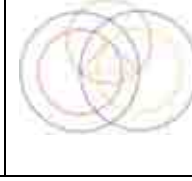
二邊等長，直徑畫圓	三邊不等長，直徑畫圓
1. 只有一個交點在邊上。 2. 另外在三角形外有兩個交點都在三角形外。 3. 將兩邊延長到圓周交點上，會發現交點和對面頂點連線和其中一邊都是垂直。	
二邊等長，半徑畫圓	三邊不等長，半徑畫圓
1. 邊長差異較大，各圓間的交點會增加。	



#### 發現四、直角三角形畫圓

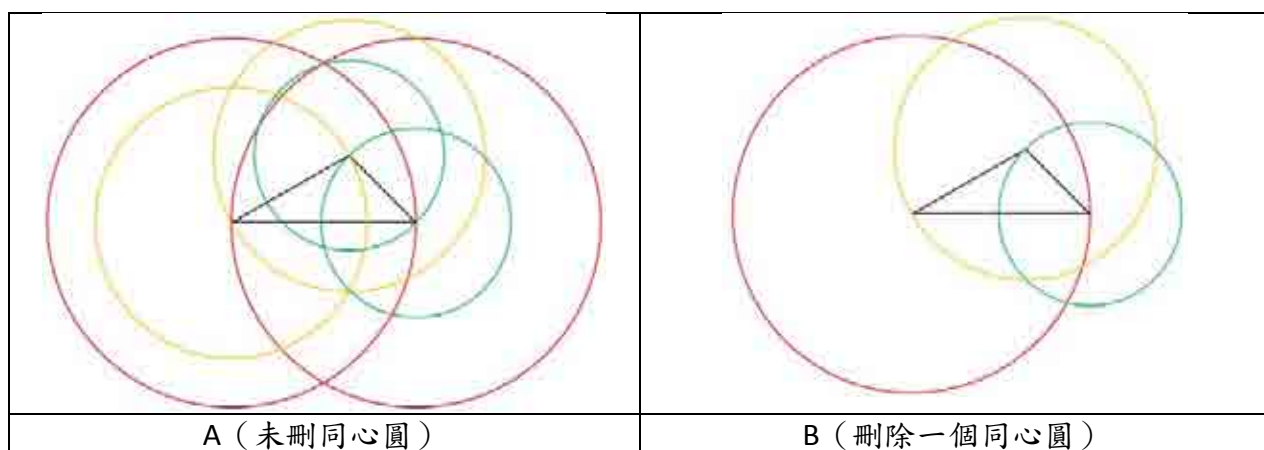
二邊等長，直徑畫圓	三邊不等長，直徑畫圓
	
<p>1.只有一個交點在邊上，其他則相交在三角形的頂點上。</p> <p>2.交點和對面頂點連線和其中一邊都是垂直。</p>	
二邊等長，半徑畫圓	三邊不等長，半徑畫圓
	
1.邊長差異較大，各圓間的交點會增加。	

#### 發現五、等腰三角形間的比較

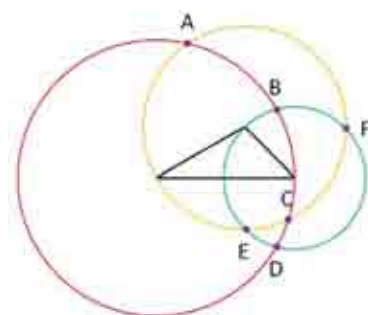
銳角三角形 -直徑畫圓-	鈍角三角形 -直徑畫圓-	直角三角形 -直徑畫圓-	銳角三角形 -半徑畫圓-	鈍角三角形 -半徑畫圓-	直角三角形 -半徑畫圓-
					
1.各圓交點都在原來的三角形邊或頂點上。			1.各圓交點除了在頂點上，其它交點並沒有觀察到特別的規律。		

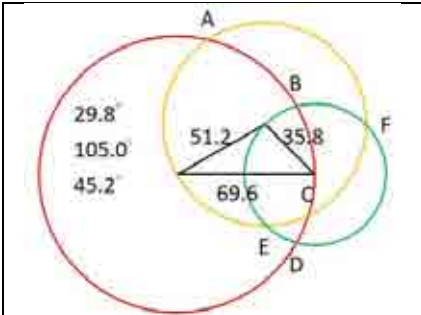
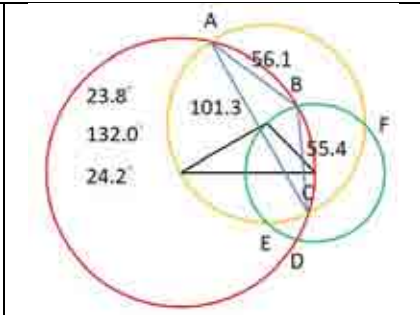
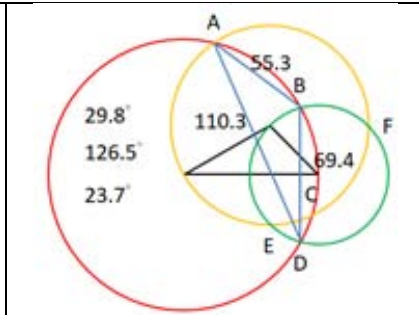
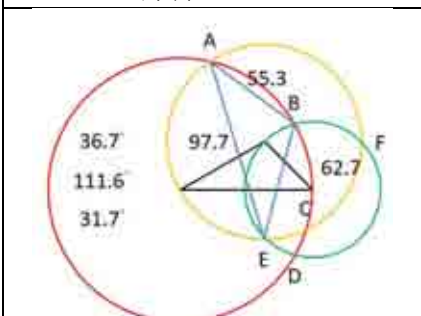
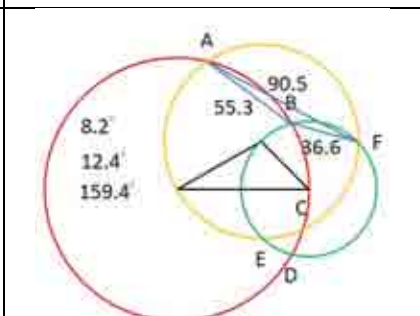
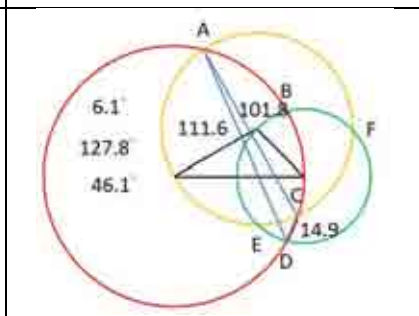
因為看不出規律，我們採取另一種分析方式，利用 PowerPoint 的繪圖，借助 AMA 的測量及 Excel 的排序功能，觀察各個新接點和原三角形間是否有相關性。另外，因為用三角形 3 個頂點為圓心、以邊長為半徑的畫法，6 個圓所相交出來的交點多，以下圖 A 為例，不含三角形

三個頂點的選擇會有 19 個交點，這 19 個交點作為新三角形的可能性會有「 $(19 \times 18 \times 17) \div (3 \times 2 \times 1) = 969$ 」種，且這 19 個交點是在這個指定三角形下所畫出來的結果，並沒有規律在，因此，我們將各組圖消去一個同心圓，只有留下其中一個來作分析。(如圖 B)



除了原來的三角形的三個頂點外，共有 6 個新的交點，我們分別給它們一個代號，從 A~F，如圖所表示；而這 6 個交點可以形成  $6 \times 5 \times 4 \div (3 \times 2 \times 1) = 20$  個新的三角形，那我們就分別去測量這 20 個三角形的 3 個角及 3 個邊長，看看它們和原來的三角形，是否有角和邊長有相關性。結果如下面的表格：



		
原始△XYZ	△ABC	△ABD
		
△ABE	△ABF	△ACD



$\triangle ACE$	$\triangle ACF$	$\triangle ADE$
$\triangle ADF$	$\triangle AEF$	$\triangle BCD$
$\triangle BCE$	$\triangle BCF$	$\triangle BDE$
$\triangle BDF$	$\triangle BEF$	$\triangle CDE$
$\triangle CDF$	$\triangle CEF$	$\triangle DEF$

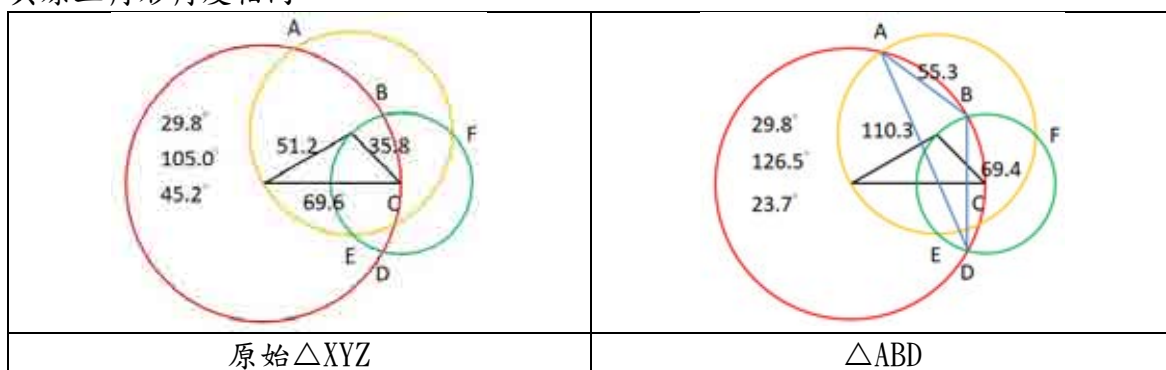
將上面的結果換成表格，記錄如下

	$\triangle XYZ$	$\triangle ABC$	$\triangle ABD$	$\triangle ABE$	$\triangle ABF$	$\triangle ACD$	$\triangle ACE$	$\triangle ACF$	$\triangle ADE$	$\triangle ADF$	$\triangle AEF$
角 X	29.8	23.8	23.7	31.7	8.2	6.1	12.8	32	6.7	38.1	44.8
角 Y	45.2	24.2	29.8	36.7	12.4	46.1	73	62.2	37.8	54.1	72.9
角 Z	105	132	126.5	111.6	159.4	127.8	94.2	85.8	135.5	87.8	62.4
邊 1	35.8	55.4	55.3	55.3	36.6	14.9	22.5	54.2	18.4	69	71.5
邊 2	51.2	56.1	69.4	62.7	55.3	101.8	97.7	90.5	97.7	90.5	90.5
邊 3	69.6	101.3	110.3	97.7	90.5	111.6	101.8	101.8	111.5	111.5	97.7
	$\triangle BCD$	$\triangle BCE$	$\triangle BCF$	$\triangle BDE$	$\triangle BDF$	$\triangle BEF$	$\triangle CED$	$\triangle CDF$	$\triangle CEF$	$\triangle DEF$	
角 X	5.9	20.8	38.5	14.7	30.6	30.5	42.1	2	12.8	14.6	
角 Y	23.1	63.1	73.4	61.3	74.6	60.6	54.3	7.7	31.9	73.5	
角 Z	151	96.1	68.1	104	74.8	91.1	83.6	170.3	135.3	91.9	
邊 1	14.9	23.4	36.6	18.4	36	36.6	14.9	14.9	22.5	18.4	
邊 2	56	56	54.5	62.2	69	62.7	18	54.3	54.3	69	
邊 3	68.9	62.7	56	69.4	69.4	72.1	22.5	69	71.5	71.8	

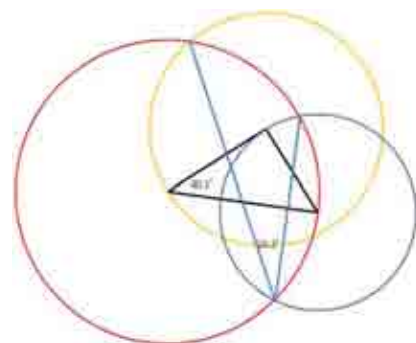
我們再將角度和邊長分別依大小來排順序，對於大小相同的地方進行觀察，下表將相同的角度，或是因為畫圖上的精準度相差 0.1 度的角度，用相同的底色標註起來：

	$\triangle XYZ$	$\triangle ABC$	$\triangle ABD$	$\triangle ABE$	$\triangle ABF$	$\triangle ACD$	$\triangle ACE$	$\triangle ACF$	$\triangle ADE$	$\triangle ADF$	$\triangle AEF$
角 X	29.8	23.8	23.7	31.7	8.2	6.1	12.8	32	6.7	38.1	44.8
角 Y	45.2	24.2	29.8	36.7	12.4	46.1	73	62.2	37.8	54.1	72.9
角 Z	105	132	126.5	111.6	159.4	127.8	94.2	85.8	135.5	87.8	62.4
	$\triangle BCD$	$\triangle BCE$	$\triangle BCF$	$\triangle BDE$	$\triangle BDF$	$\triangle BEF$	$\triangle CED$	$\triangle CDF$	$\triangle CEF$	$\triangle DEF$	
角 X	5.9	20.8	38.5	14.7	30.6	30.5	42.1	2	12.8	14.6	
角 Y	23.1	63.1	73.4	61.3	74.6	60.6	54.3	7.7	31.9	73.5	
角 Z	151	96.1	68.1	104	74.8	91.1	83.6	170.3	135.3	91.9	

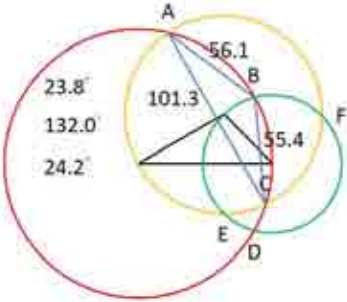
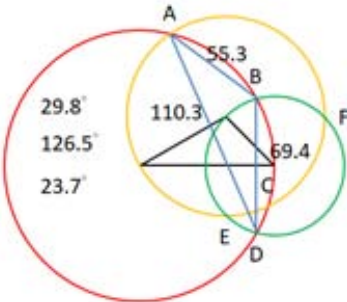
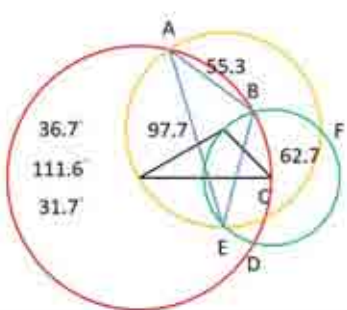
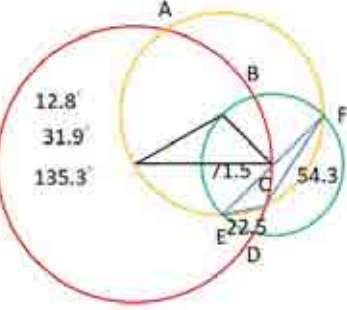
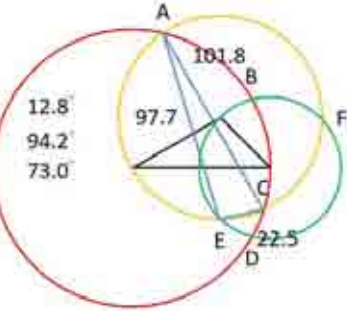
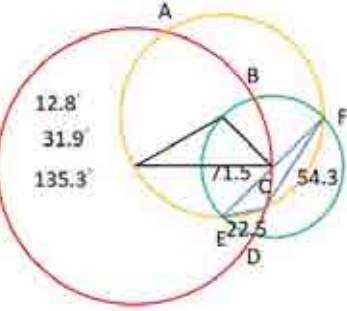
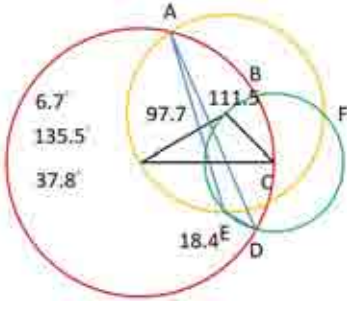
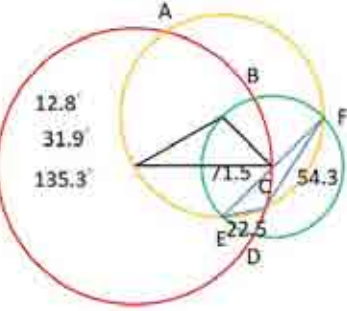
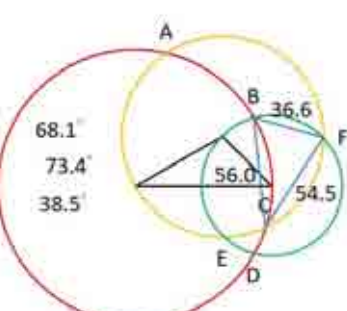
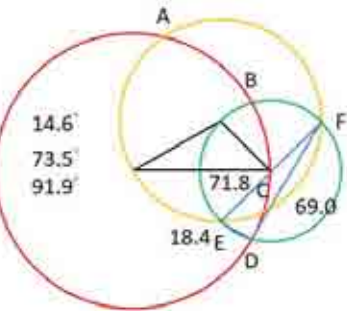
#### (一) 與原三角形角度相同



如上圖， $\angle XYZ$  和  $\angle ADB$  都是 29.8 度，我們再畫出一個任意三角形，然後用同樣的方式進行測量，如右圖表示，但角度似乎就不相同了，我們推論，角度相同應該是屬於巧合，並沒有什麼規律可循。



(二) 角度相同的三角形比較

	
$\triangle ABC, \angle ACB$	$\triangle ABD, \angle ADB$
	
$\triangle ABE, \angle AEB$	$\triangle CEF, \angle FEC$
	
$\triangle ACE, \angle EAC$	$\triangle CEF, \angle EFD$
	
$\triangle ADE, \angle AED$	$\triangle CEF, \angle ECF$
	
$\triangle BCF, \angle BFC$	$\triangle DEF, \angle FED$

$\triangle BDE$ , $\angle EBD$	$\triangle DEF$ , $\angle EFD$
$\triangle BDF$ , $\angle DBF$	$\triangle BDF$ , $\angle DFB$

從上面的圖，左右的比較結果，大多的三角形中如果角度相等或接近，那三角形的三個點都會在相同顏色的圓周上，例如「 $\triangle ABC$  的  $\angle ACB$ 」和「 $\triangle ABD$  的  $\angle ADB$ 」都在紅色圓周上；「 $\triangle ACE$  的  $\angle EAC$ 」「 $\triangle CEF$  的  $\angle EFD$ 」都在黃色圓周上；「 $\triangle ADE$  的  $\angle AED$ 」和「 $\triangle CEF$  的  $\angle ECF$ 」都在黃色圓周上；「 $\triangle BDE$  的  $\angle EBD$ 」和「 $\triangle DEF$  的  $\angle EFD$ 」都在綠色圓周上；「 $\triangle BDF$  的  $\angle DBF$ 」和「 $\triangle BDF$ ， $\angle DFB$ 」都在綠色圓周上。

另外，從上面的圖來看，「 $\triangle BDF$  的  $\angle DBF$ 」和「 $\triangle BDF$ ， $\angle DFB$ 」角相等，是否就可以說  $\triangle BDF$  是一個等腰三角形，這樣的作圖就可以畫出一個等腰三角形呢？應該不是。因為角度相差了 0.2 度，而且長度測量也相差了 0.4，角度和長度雖然接近但還是有差異，因此這樣的角度的應該是屬於巧合。

## (二) 長度相同的三角形比較

	$\triangle XYZ$	$\triangle ABC$	$\triangle ABD$	$\triangle ABE$	$\triangle ABF$	$\triangle ACD$	$\triangle ACE$	$\triangle ACF$	$\triangle ADE$	$\triangle ADF$	$\triangle AEF$
邊 1	35.8	55.4	55.3	55.3	36.6	14.9	22.5	54.2	18.4	69	71.5
邊 2	51.2	56.1	69.4	62.7	55.3	101.8	97.7	90.5	97.7	90.5	90.5
邊 3	69.6	101.3	110.3	97.7	90.5	111.6	101.8	101.8	111.5	111.5	97.7
	$\triangle BCD$	$\triangle BCE$	$\triangle BCF$	$\triangle BDE$	$\triangle BDF$	$\triangle BEF$	$\triangle CED$	$\triangle CDF$	$\triangle CEF$	$\triangle DEF$	
邊 1	14.9	23.4	36.6	18.4	36	36.6	14.9	14.9	22.5	18.4	
邊 2	56	56	54.5	62.2	69	62.7	18	54.3	54.3	69	
邊 3	68.9	62.7	56	69.4	69.4	72.1	22.5	69	71.5	71.8	

從上面的表格看來，圓交點所形成的三角形，和原來的三角形似乎沒什麼規律，沒有相同的長度，也沒有放大、縮小的等比例關係。

而使用相同底色來表示相同長度的情形可以發現到，相同長度應該來自於相同的邊，例如  $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ABF$  都有 55.3 的長度邊，應該是因為它們都有共同的 AB 邊； $\triangle ACD$ 、



$\triangle ACE$ 、 $\triangle ACF$  也都有 101.8 的長度邊，應該也是因為它們都有共同的 AC 邊，因此我們推論，這樣的畫圓方式，目前尚無規律可循，也就無法應用。

## 柒、結論

一、不用量角器和尺，用圓規也可以找到任意三角形的高！

（一）以一邊的中點為圓心，邊長為直徑（也就是圓心到頂點的長當作半徑畫圓），當這個圓和另外兩個邊有交點時，將這個交點連到它的對邊，這條一定會和其中一個邊互相垂直，也就是這個三角形一邊的高。

（二）如果沒有和另外兩邊有交點（通常是在鈍角三角形），那就得用延長的方式，延長另外兩邊的邊長，讓它延長至可以和圓有交點的地方，然後再用這個交點連到對面的頂點，這個就是這個三角形其中一邊的高。

二、在正三角形的前提下，用邊長當直徑的畫圓方式，可以在三個邊上交出三個新的點，這樣的畫法可以找到正三角形的  $1/2$  倍縮小圖；在相同的前提下，用邊長當半徑的畫圓方式，可以在原來的三角形交出三個新的點，這樣的畫法可以找到正三角形的 2 倍放大圖；

三、在一個任意圓的圓周上，任意點出三個點，可以畫出一個圓裡面的三角形；然後固定其中兩個頂點，假設是 A、B 兩點，然後在圓上任意移動第三個頂點 X 的位置，那這個角永遠都一樣大，也就是  $\angle AXB$  永遠是相同的角度。

這次的研究，也許不像一開始所預想的結果，可以找到跟原來三角形有相關的圓交點三角形，但也讓我們發現了一些新的性質和新的想法，可以把圓內交點的性質應用在找指定線或指定角度的對邊，還是令人很開心，這次因為時間和數量較多的關係，只能探究其中二十種可能性，其實還有上百種的組合還沒有去探究，也許未來還有機會繼續延伸，或許能找到一些特別的性質也說不定喔！

## 捌、參考資料及其他

- 一、圓與圓規-翰林四年級數學課本
- 二、對稱圖形-南一五年級數學課本
- 三、三角形-翰林四年級數學課本

# 109 學年度臺中市中小學科學展覽會

## 作品說明書

科 別：生活與應用科學科(一)機電與資訊

組 別：國小組

作品名稱：終局之戰！遠離死神內輪差！

關 鍵 詞：內輪差、聲波測距、角度感測

編號：

製作說明：

1. 說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
2. 編號：(由承辦學校統一編列)
3. 封面編排由參展作者自行設計。





## 終局之戰！遠離死神內輪差！

前年，我們數學研究社為了瞭解新聞報導中的內輪差車禍發生的原因，認識了所謂的「內輪差」，並且學到了如何從內輪差產生的原因、差異，提出一些交通安全建議。但是，死神似乎還是不斷地跟隨各種大型車輛的內輪差，挑戰著所有用路人的交通安全判斷力。今年的新聞中仍不停地傳出令人遺憾的不幸事件。因此，我們研究社不禁問自己，除了去年提出的「站在安全區段」及「判斷車身的轉彎幅度」的觀念建立外，我們還有什麼可以努力的嗎？

於是去年的研究，我們在大型車輛駕駛人及其他道路使用人都是遵守交通安全規則的前提下，試圖運用數學的方法技術，找到更多協助道路環境改善的方法，或者是一些計算的公式，作為一些警示（報）器設置位置的參考。因此，我們所探討的問題聚焦如下：

一、各種車輛在行駛轉彎道路時，會使用到的道路範圍、面積有多大？

二、影響各種車輛在行駛轉彎道路時所佔用到的道路面積的因素有哪些？是否可以找到一個快速的計算方式協助辨別。

最後，我們用數學計算和機率發生的觀點及環境分析上，運用程式設計發揮創客精神，希望提供駕駛人、用路人提升交通安全的具體方法，更透過建議政府在交通法規修改及將本次研究結論推廣，增加並保障所有人的用路安全。

### 壹、研究動機—使命尚未完成

有了前一次研究的經驗及知識，我們對於內輪差已經有所認識，也能學以致用，在路上遇到較大型的車輛，就會「禮讓」車輛先行，避免和車輛的直接衝突。要讓多遠？我們也知道大概要距離車輛的  $\frac{1}{3}$  車長、 $\frac{1}{3}$  車寬以上，才能避免發生危險。但可惜的是，不是每個人都知道怎麼保護自己，我們還可以怎麼做去避免這些事情的發生呢？

但自上次的研究之後，憾事仍然持續發生，在我們的學區內發生了內輪差的車禍，距離如此地近，就在自己生活的週遭。這次的新聞報導不但令我們害怕，更讓我們感到很難過，受傷死亡的人生活在我們的身邊，對我們來說，就像發生在鄰居身上，不僅僅是一個新聞中遙遠的陌生人了。

而我們在上次所提出的「安全建議」，在後來老師帶我們做資料整理時，不斷地出現被應用，如第54屆全國科展國中組的數學科作品中，用數學的計算推論出  $\frac{1}{2}$  到  $\frac{1}{3}$  的安全距離，又或是大型車輛加裝轉彎警報器、蜂鳴器，又或是最新的發明，在大客車側面加裝打在地面上的雷射光束，都是一種阻止死神的發現和應用，我們很開心地肯定自己的研究是正確的，還有實用的！然而，這些都已經被發現了，也被應用了，內輪差所造成的危險卻仍然存在，那我們是否還有可以再努力的地方呢？今年，就讓我們再度挑戰內輪差、挑戰我們能不能更向前邁進一步吧！

 <p>夫妻檔研發「內輪差警示燈」大車轉彎視線死角照給你</p>	 <p>砂石車疑內輪差死角 台中東區輾死2女</p>	
2019.04.18 自由時報	108.10.16 聯合新聞網資料	108.04.18 民視新聞畫面

## 貳、研究目的一學以致用

上一次，我們使用畫圖的方式發現車輛移動的軌跡，發現了用直線居然可以畫出圓形的方法，真的讓我很驚訝，讓我們看到了原本直線的車輛，在轉彎時不管是單一個的輪胎，或者是本身的大車體，或是貨車附掛的車箱，都在轉彎時形了一個很特別的圓形。今年，剛好我們又學到了「扇形」，如果我們再去了解「圓面積」，透過車輛佔用路面的大小，那是不是我們就可以找到內輪差車禍所造成的「危險」大小呢？

因此，第一，我們打算運用面積的推論和計算，看看「危險範圍」面積是否可以有公式可以計算，而它的大小是否和車輛的危險性(以下研究中，我們定義它叫「危險率」)有相關呢？從遠離車輛的距離，改變成遠離車輛的範圍，我們相信，對於遠離危險是有幫助的。

第二，我們在上次的研究中發現，內輪差的大小和轉彎的角度有關，而危險面積的大小也與角度有關，兩者之間是否有相關性？是否也可以找到一個「公式」來做計算呢？因為現有的警示雷射光是固定的，如果能隨著司機叔叔轉彎的角度來改變雷射光的角度的話，那未來的應用性就更強了，像是特斯拉(Tesla)一樣可以自動煞車，一想到可以用新的技術方法對付內輪差，真令人期待啊！

## 參、研究設備及器材—工欲善其事，必先利其器

這次的研究中，我們仍然沒有這麼多的車輛、拍照、錄影或資訊設備可以用來測量、記錄或是統計，所以在老師的指導下，我們藉由一些電腦軟體來進行研究，說明如下：

- 一、Excel: 我們使用這套軟體來進行反覆的計算。這套軟體本身就可以輸入一些公式，只要改變所設定的數值，它可以很輕鬆替我們進行很煩雜的計算，也可以幫我們畫出統計圖或折線圖，讓我們可以更清楚地看到一些關係。
- 二、Photoimpact: 有一些圖形在 Word 上不好畫，我們就使用這個軟體來畫圖。
- 三、Mblock: 主要用來撰寫程式的軟體。
- 四、Arduino Uno: 主要程式控板，搭配感測儀器進行設計。

## 肆、研究過程與方法

### 一、怎麼「畫出」內輪差？

在上一次的研究中，我們知道了一輛固定前輪轉彎角度的車子，在不斷地轉彎前進的情況下，會繞出一個圓形，而不管是



內側還是外側的車體，它們都是繞著同樣的一個圓心，因此，我們知道只要找到這個圓心，加上半徑的長度，就可以利用圓規來畫出圖。而在上次的研究中，我們也知道車子轉彎所畫出圓的大小，和轉彎的角度有關，也就是說，前輪轉彎角度愈大，所畫出的圓愈小；相反的，轉彎的角度愈小，所畫出的圓就愈大。但是，我們這個研究小組討論之後，覺得和實際生活好像有些出入，車輛與其他用路人容易發生擦撞的情況，大多在車輛「急轉彎」的時候，換句話說，轉彎速度快、角度太大，會更容易造成危險，似乎跟所畫出的圓的大小沒有什麼特別的相關，因此，我們修正觀察內輪差的方式，從原來的轉彎角度，更進化為所佔有的面積差異，嘗試用數學學到的面積，來解釋、發現內輪差真正潛在的危險。

畫出「內輪差」的過程如下：

- (一) 先設定一輛車子，畫出它的外殼，再把它的位置給畫出來。
- (二) 決定前輪（轉彎輪）的轉角，上次的研究過程中，我們知道前輪轉彎的最大角度不超過45度，所以不用過度刻意、誇張輪子的轉彎角度，以免畫出來的圖失去真實感。
- (三) 如何找出圓心？在上次的研究中，我們知道，畫出一條垂直前輪的線，然後，將後輪兩中的中心點連線再延長，那前輪和後輪所畫出來的線會相交在一點，這一點就是這輛車轉彎的圓心了。
- (四) 我們先假設這輛車要轉入90度的右轉道路。所以什麼時候轉彎完成了呢？就是後輪（因為它不會轉來轉去）如果也完成旋轉了90度旋轉，那這輛車就已經轉彎完成了。所以我們以剛剛相交點的點當圓心，打開圓規，從圓心張開到內側後輪當半徑，畫出一個圓心角90度的弧線，然後在終點畫出一個輪子，表示車子轉彎後的內側後輪。
- (五) 先在這個後輪的上畫出一條直線。
- (六) 再回到圓心，這次打開圓規到前輪，把這個長度當半徑，順時針畫出一條弧線，然後這條弧線會和第(五)步驟的直線相交在一點，這個點就是轉彎完成後前輪的位置了。我們這個時候也可以看到，前輪和後輪的弧線有「差」異，這個就是「內」前後「輪」行走路線的「差」異，也就是所謂的「內輪差」囉！

- (\*) 額外加演彩蛋：我們發現一件很有趣的事，車子在走直線的時候，大家走的距離、長度都一樣，但是在轉彎的時候，我們會知道，外側輪子會比內側輪子走得更長，因為同樣的圓心角，外面的弧線會比內圈的弧線還要長，那，兩個前輪的连接桿



或是兩個後輪的連接桿是伸縮的、有彈性的嗎？不然就有可能會被扯斷耶！但是我們後來去查資料，其實車子的設計裡早就有解決這樣的問題的結構，叫作「**差速器**」，簡單來說，就是讓外側輪子在轉彎時搭配內圈的距離多轉個幾圈，這樣就可以保持平衡了！好聰明的設計啊！聽說這個是用大小齒輪組裝出來的，以後也可以作為我們研究的其中的新主題呢！

## 二、內輪「差」了多少？

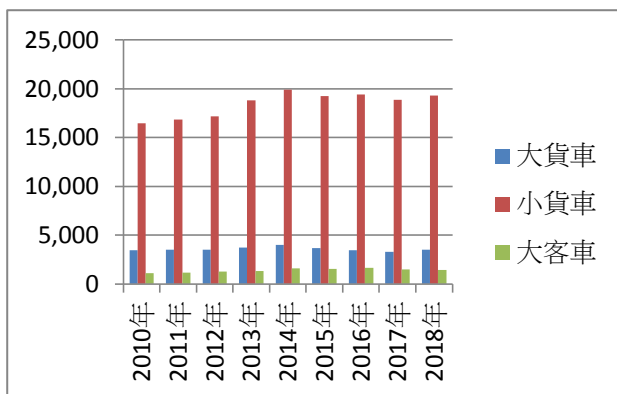
我們在上次的研究中，只是看到了「差」的存在。但是，這個「差」怎麼會造成這麼多的危險？我們猜想，是因為它不容易被看見吧！但明明就知道有車子要轉彎，只要有反應的人，都應該會懂得避開才是，除非，他們想不到！對，就是因為想不到，所以看不到危險！因此，我們提出了轉彎時的三種狀態，來作為「危險率」的前提。也就是「理想路線」、「理論路線」、「實際路線」。

- （一）理想路線：既然稱為轉彎，好像在路上就會看到一個扇形才對。這個扇形的形狀就會是連結兩邊道路所畫出來的四分之一圓（以 90 度街道轉角為例）。但我們知道，車子是一種「剛體」，不會變形，所以車子在轉彎時的路徑絕不會是一個這麼完美的弧線。稱為理想，真的是「想」出來的形狀。
- （二）理論路線：我們用畫圖的方式，來找到差異的存在，而這個差異的存在，跟輪子轉彎的角度有關，我們使用了同心圓的理論來找到範圍，我們再用面積大小差異來找到危險的輕重，那所謂的「差異」是跟誰比較得來的呢？那就是跟「理想路線」所比較得來的差異了。
- （三）實際路線：其實，實際在路上開車，我們很少看到爸爸媽媽在轉彎的時候一次就固定輪胎角度進行旋轉，通常都是不斷改變的，看網路上駕駛訓練班的開車訓練影片，轉彎時先轉方向盤半圈，再轉一圈，再回正一圈，最後轉正走直線。所以實際上路的車輛並非我們用理論去走出來的路線，當然，這也可能是不可預知的危險，比較屬於是開車的人的使用習慣所造成的，好像不可避免，但實際路線似乎也都包含在理論路線之中，因此，知道了理論路線，就可以避免實際路線所產生的危險了。

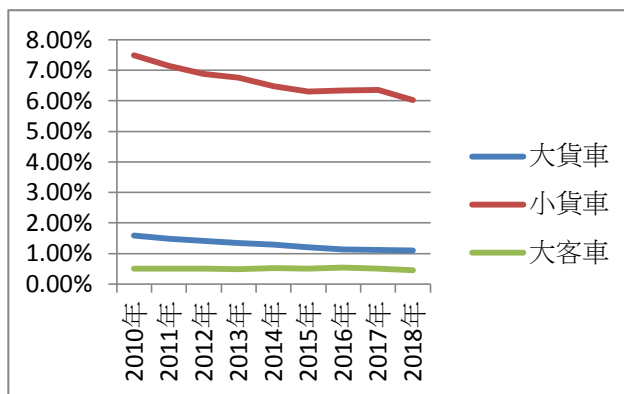
## 三、好像沒那麼危險？「危險率」的提出！

查詢這幾年來的交通事故中，大客車、聯結車的事故率似乎沒想像中的高，而在上次的研究中，轉彎愈大、愈快，影響道路的時間愈短，照理說應該會降低危險度，但和實際生活感覺卻又如此的不切實際，那到底要怎麼看車輛的危險大小呢？因此，我們嘗試著用「面積」去解讀大小車輛內輪差所造成的「危險率」。那「危險率」的相關原因、因素有哪些呢？僅單就面積大小就可以來確認嗎？都有待我們再深入的討論。

下圖是從 2010 年（民國 99 年）到 2018 年（民國 107 年）之間，較大型車輛的事故事件數量，以及事故比率（車輛事故÷總事故數×100%），我們可以發現，雖然事故比率有降低的走勢，但再觀察事件數統計圖時，其實事件數並沒有明顯減少，有些還有小小增加，所以我們可以知道，車輛發生危險的次數並沒有減少，可能是因為其他種類車輛（例如腳踏車、機車或小客車）的事故數增加，才會降低比率。因此，大型車輛並不是較不危險了，「單純」以內輪差面積來看危險率可能會有問題。



2010-2018 車輛事故事件數統計圖



2010-2018 車輛事故比率折線圖

（資料來源：中華民國內政部警政署全球資訊網-重要統計結果表）

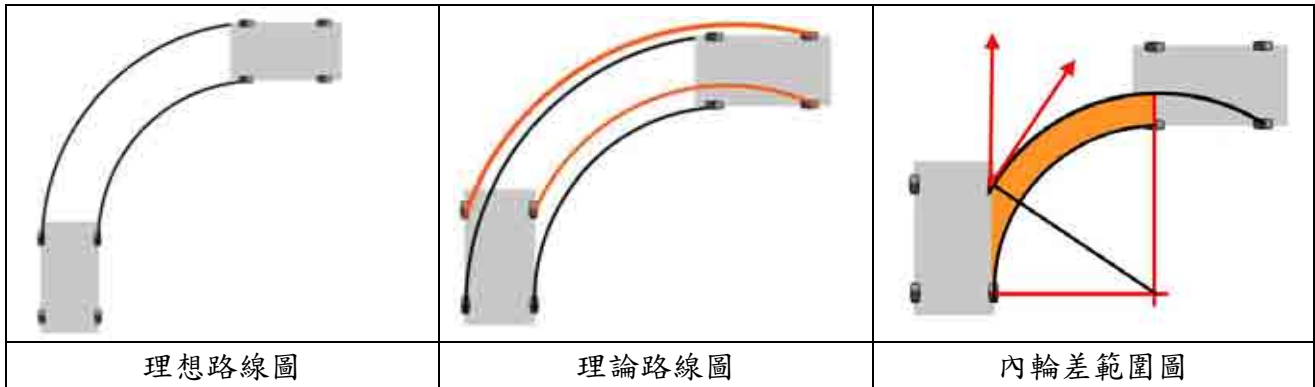
#### 四、科技，始終該來自於人性！

這不是一句廣告詞！我們認為，既然有危險，那我們就更該解決這個問題，如果能順利演算出危險範圍，我們是否可以靠科技來避免危險、提醒駕駛或用路人危險的來臨？藉由在資訊課學到的 Scratch 觀念，我們也可以嚐試寫出一個檢測和回饋的程式，那我們是否可以將檢測「距離」和回饋「警告」進行設計呢？對我們來說是一大挑戰，卻也是一大成就，讓我們有機會學以致用，造福社會。

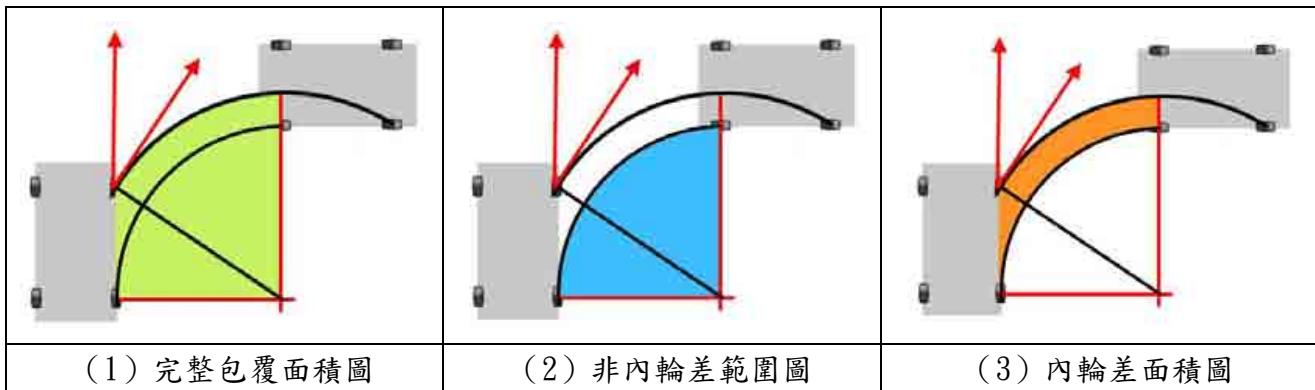


## 伍、研究結果

### 一、「理想」與「理論」路線內輪差面積公式

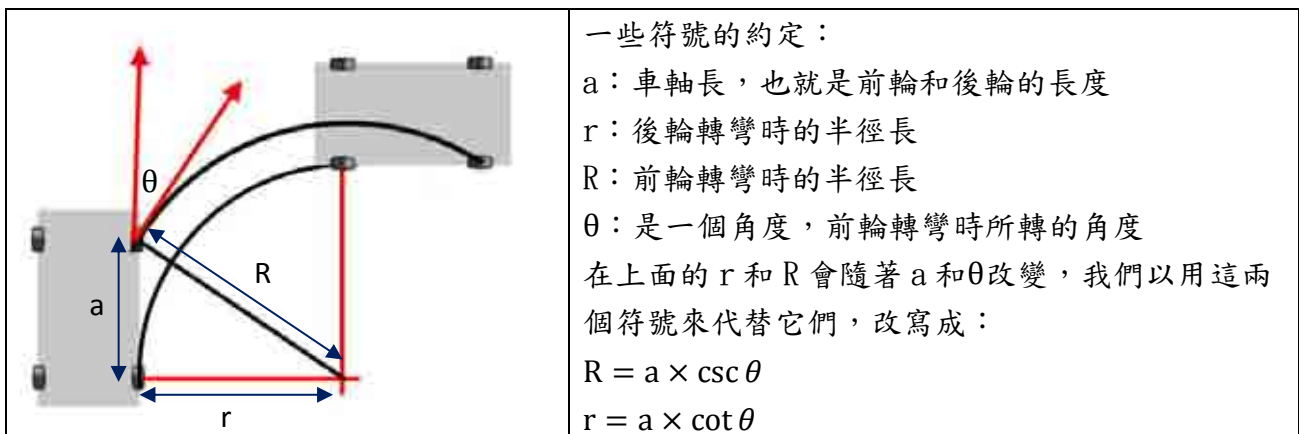


上面圖中，我們可以看到從理論路線圖和理想路線圖的差異中，就是容易被忽略的差異，也就是內輪行經所產生的差異。這塊面積是否能被估算出來呢？

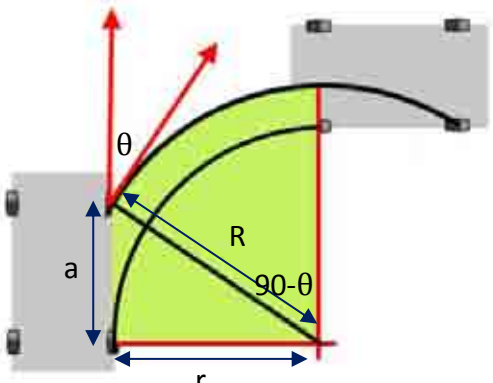
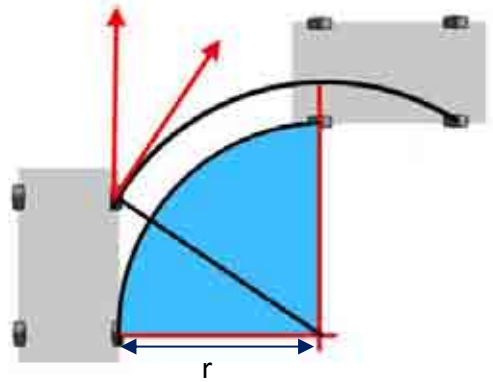
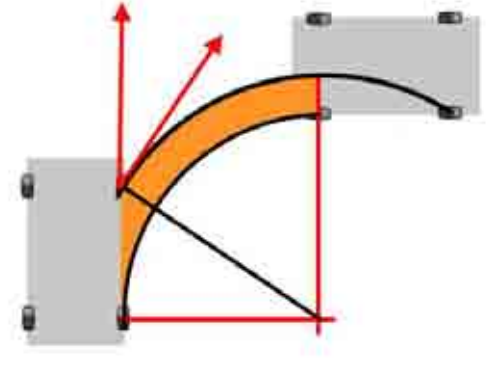


內輪差面積我們可以看成是上圖(1)減去上圖(2)，就可以得到上圖(3)的面積大小，而上圖(1)是由一個直角三角形加上一個扇形所組成的，而上圖(2)是一個1/4圓，因此我們可以用學過的面積公式，再加上老師解說的圓面積計算公式，應該就可以推論出這個內輪差面積公式了。

從上一次的研究中我們學到如何得到內前輪轉彎半徑(R)和內後輪轉彎半徑(r)，與車軸長(a)和前輪轉彎角度( $\theta$ )有關，我們查在直角三角形中，三個邊和三個角都有一些關係，在國中大大哥哥大姊姊的科展作品中，稱這個叫三角函數，而我們也曾經學過邊角的關係，一個三角形中，大角對大邊，小角對小邊，因此，對應的角度愈大，三角形的某個邊也相對的是比較長的。結合這樣的關係，我們嘗試縮小公式的長度，過程如下：





	<p>左邊圖綠色面積，可以分成一個直角三角形和一個扇形面積，所以我們把面積寫成：</p> <p>直角三角形面積 <math>= a \times r \div 2 = a \times a \times \cot\theta \div 2</math></p> $= \frac{1}{2} a^2 \cot\theta$ <p>扇形面積 <math>= R \times R \times 3.14 \times \frac{90-\theta}{360}</math></p> $= a \times \csc\theta \times a \times \csc\theta \times 3.14 \times \frac{90-\theta}{360}$ $= a^2 \csc^2\theta \times 3.14 \times \frac{90-\theta}{360}$ <p>所以綠色面積 <math>= \frac{1}{2} a^2 \cot\theta + a^2 \csc^2\theta \times 3.14 \times \frac{90-\theta}{360}</math></p>
	<p>左邊圖綠色面積，可以看成是一個四分之一圓，所以我們把面積寫成：</p> <p>四分之一圓面積 <math>= r \times r \times 3.14 \times \frac{1}{4}</math></p> $= a \times \cot\theta \times a \times \cot\theta \times 3.14 \times \frac{1}{4}$ $= a^2 \times \cot^2\theta \times 3.14 \times \frac{1}{4}$ $= \frac{1}{4} a^2 \cot^2\theta \times 3.14$
	<p>所以，左邊的橘色內輪差面積就等於綠色面積減去藍色面積，可以寫成：</p> $\frac{1}{2} a^2 \cot\theta + a^2 \csc^2\theta \times 3.14 \times \frac{90-\theta}{360} - \frac{1}{4} a^2 \cot^2\theta \times 3.14$ $= \left( \frac{1}{4} a^2 \right) \left( 2\cot\theta + \csc^2\theta \times 3.14 \times \frac{90-\theta}{90} - \cot^2\theta \times 3.14 \right)$ $= \left( \frac{1}{4} a^2 \right) \left( 2\cot\theta + 3.14 \times \left( 1 - \frac{\theta}{90} \csc^2\theta \right) \right)$

車軸長決定大小

轉彎角度決定大小

## 二、車軸長與內輪差面積的關係

一些反覆、複雜的計算，我們就交給電腦來處理！從內輪差面積公式中，我們可以觀察到影響面積大小的原因分成了兩個部份-車軸長（a）和角度（ $\theta$ ），在固定轉彎角度下，我們可以知道車軸長愈長，內輪差面積就會愈大，所以可以證明大車會比小車來得危險。

	A	B	C	D
1	a (車軸長, 公尺)	$\theta$ (轉彎角度)	弧度換算 (Excel的要求)	內輪差面積 (平方公尺)
2	2.0	30	0.524	2.417
3	2.5	30	0.524	3.776
4	3.0	30	0.524	5.438
5	3.5	30	0.524	7.402
6	4.0	30	0.524	9.668
	4.5	30	0.524	12.236
	5.0	30	0.524	15.106
	5.5	30	0.524	18.278
	6.0	30	0.524	21.752
	6.5	30	0.524	25.529
	7.0	30	0.524	29.607
	7.5	30	0.524	33.988
14	8.0	30	0.524	38.670
15	8.5	30	0.524	43.655
16	9.0	30	0.524	48.942
17	9.5	30	0.524	54.531
18	10.0	30	0.524	60.423

車軸長愈長

內輪差面積愈大

## 三、轉彎角度與內輪差面積的關係

另外在固定車子長度的前提下，轉角愈大面積就會愈大嗎？因為公式裡有關角度所對應的數字大小不一定，所以我們就把公式放到 Excel 裡做做看，角度（ $\theta$ ）愈大，數字的變化如何呢？

我們可以看到一個跟預期不一樣的結果，轉彎的角度愈大，內輪差面積卻愈小。這跟我們生活中的觀察不同，一般來說，「急轉彎」說的就是在短時間裡完成轉彎的動作，這比較容易產生危險，轉彎角度愈大，完成轉彎的速度應該會愈快，愈容易發生危險才是，但在內輪差面積的觀察上，卻是角度愈小、內輪差面積愈大，因此我們合理的猜測，除了減少內輪差面積的大小以減少跟預想中使用路面的差異，應該還有一些因素是應該考量進去，才能真的呈現出來大車、小車轉彎時所造成的危險程度。

	A	B	C	D
1	a (車軸長, 公尺)	$\theta$ (轉彎角度)	弧度換算 (Excel的要求)	內輪差面積 (平方公尺)
2	2.6	1	0.017	5.270
3	2.6	3	0.052	5.191
4	2.6	6	0.105	5.073
5	2.6	9	0.157	4.954
6	2.6	12	0.209	4.835
7	2.6	15	0.262	4.714
8		18	0.314	4.592
9		21	0.367	4.468
10		24	0.419	4.343
11		27	0.471	4.215
12		30	0.524	4.085
13	2.6	33	0.576	3.951
14	2.6	36	0.628	3.815
15	2.6	39	0.681	3.674
16	2.6	42	0.733	3.529
17	2.6	45	0.785	3.380
18	2.6	60	1.047	2.541

轉彎角愈大

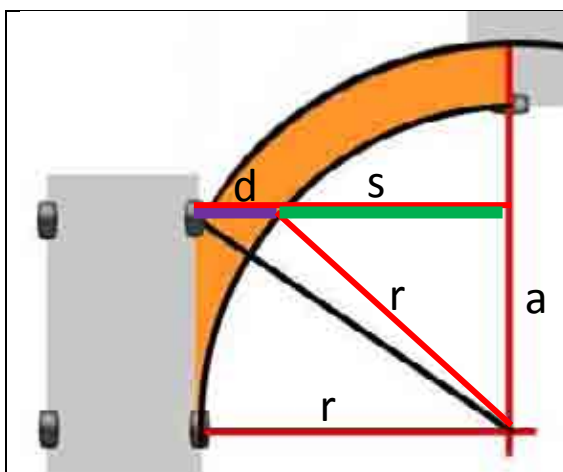
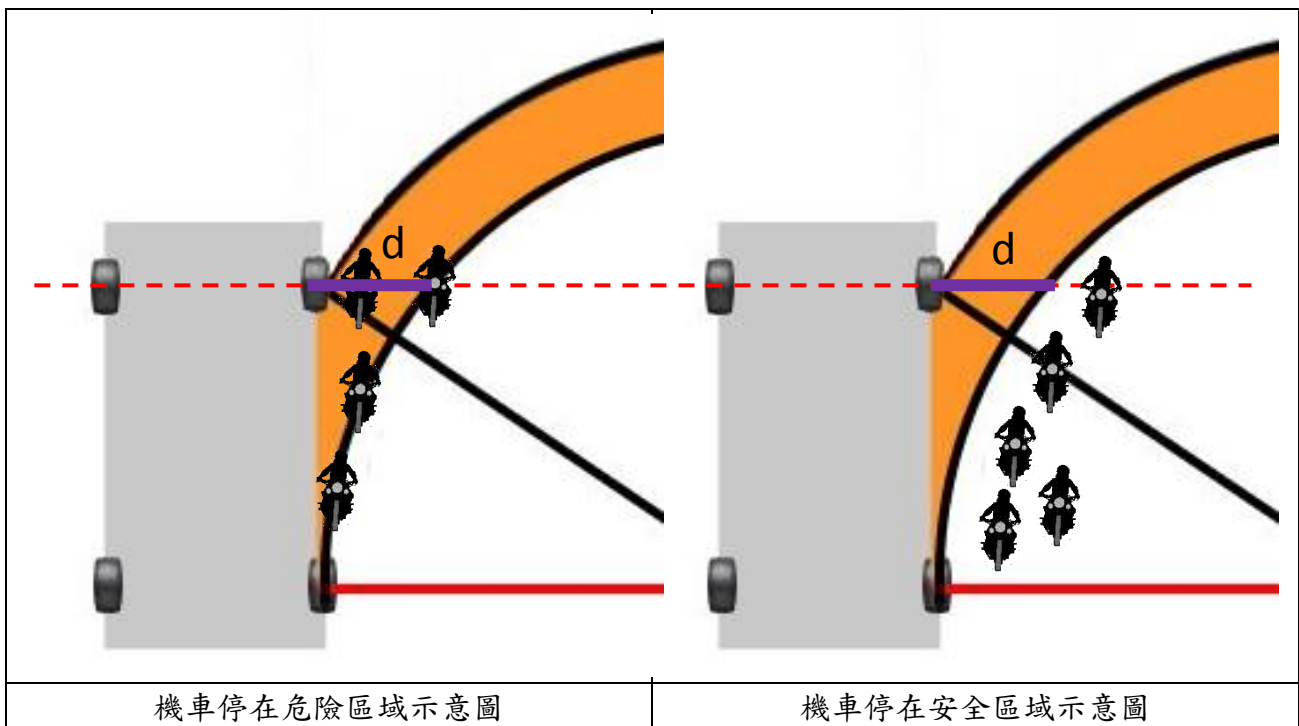
內輪差面積愈小？

#### 四、再發現-「離多遠才安全」

從上面的推論我們可以發現，內輪差的面積範圍，其實已經被兩個重要因素給決定了，一個是車輛大小（車軸長），另一個是車輛在轉彎時所採用的角度（前輪轉彎角），那其實我們只要能知道這兩個數值，其實就可以推估會影響到用路人的範圍囉！

我們再以上圖（3）來看，在每位開車的駕駛都有正確良好習慣，也就是會先看照後鏡或是向右側看一下有無其他車輛或路人後再轉彎的前提下，我們只要預估前輪至內輪差間的距離，也就是圖上  $d$  (dangerous line) 的長度，就可以知道危險區域的範圍何在了。那  $d$  的長度有公式嗎？

在下圖中，我們想要說明在大型車輛轉彎時的危險標示區域怎麼區別，在左邊的圖中所畫的是「機車停在危險區域示意圖」，只要是停在有顏色的區域中，都有可能捲入未能看見的內輪差危機之中；而在有色地區以外的地方，都是安全的區域，我們在紅色虛線上畫了一段紫色線，如果在和大車併行的情況下，只要離開紫色線長度的距離，就可以說是進入到安全的區域之中。那  $d$  有多長呢？可以找到它的公式嗎？



我們在左邊圖中可以看到一些關係：

$$d + s = r$$

所以：

$$d = r - s$$

接下來，我們要知道  $s$  可不可以換成跟  $a$  有關的代號，就可以換成可以計算的公式了，因為老師說過的直角三角形的關係，Excel 可以幫我們作計算，所以我們可以這樣寫下面的算式：

$$s = \sqrt{r^2 - a^2}$$

所以我們就可以開始換公式囉！

	$  \begin{aligned}  d &= r - s \\  &= r - \sqrt{r^2 - a^2} \\  &= r - \sqrt{a^2 \cot^2 \theta - a^2} \\  &= r - a\sqrt{\cot^2 \theta - 1} \\  &= a\cot \theta - a\sqrt{\cot^2 \theta - 1} \\  &= a(\cot \theta - \sqrt{\cot^2 \theta - 1})  \end{aligned}  $
--	--

而在每一輛車上，車軸長  $a$  是固定的，所以當輪胎已經決定轉彎角度時，我們就可以知道這個長度了。有了這個公式，就可以交給科技做更多的運用囉！

## 陸、討論

### 一、內輪差面積與危險率不成正相關

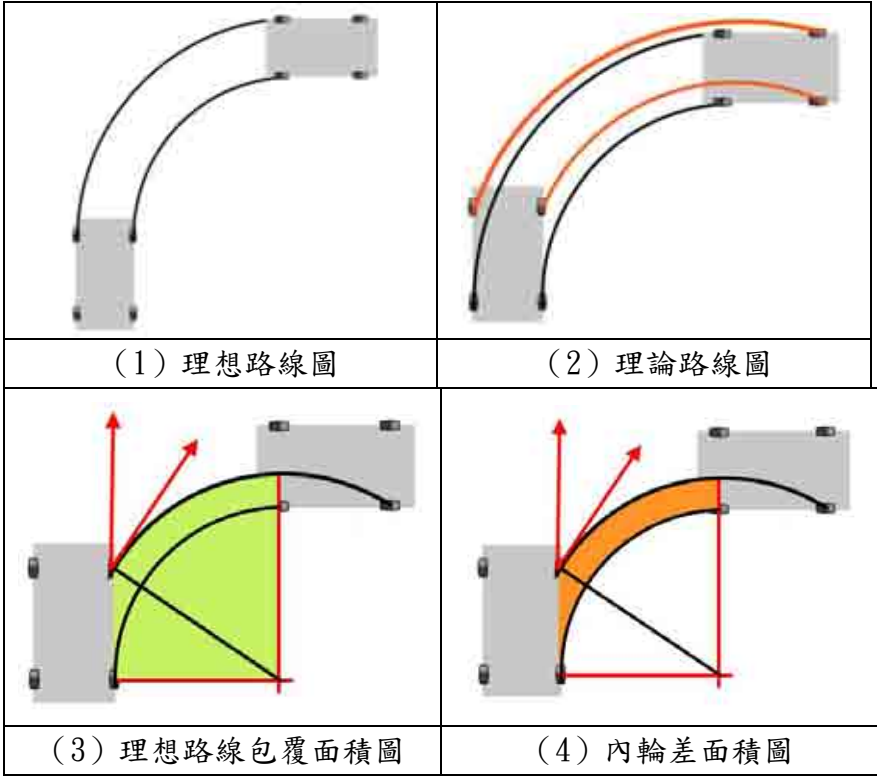
我們推論轉彎角度與內輪差面積時發現，轉角的大小會影響轉彎的半徑，而半徑會影響扇形的面積，因此，轉角愈小，半徑愈長；而半徑愈長，面積愈大，所以才會有轉角愈小而內輪差面積愈大的關係；但在我們的研究公式中，增加危險的長度應該是來自車輛的大小，也就是車軸長度，所以對於「危險」的評估，我們還需要再加入其他的可能因素。

### 二、危險率的再定義

「內輪差危險發生的又快又急」，於是我們推論危險的發生，除了面積外，還需要考慮發生的時間，也就是人們在發現危險後能夠閃躲的機會。那要怎麼決定反應的時間呢？我們提出兩個看法，如下說明：

（一）內輪差面積與理想面積的比例關係：

道路轉彎處之所以危險，是來自於其他用路人可以使用道路面積變小，所以才會比較容易發生事故。因此，我們應該可以觀察生活感受中對於「車輛轉彎時所佔面積」與「內輪差所增加面積」之間的關係，來探討危險的機率。我們再將前面的圖拿來作說明：





上面的圖告訴我們，跟生活預期想法的差異來自於理論路線和理想路線間的差別，也就是上圖（1）和上圖（2）的差距，而這個差距不能只看圖（4）內輪差面積的大小，應該還要參考它佔有理想範圍中的比例，也可以說是和想像中的差距比例，如此用來說明車輛大小的「危險率」可能會更適合。我們將圖（4）的橘色面積除以圖（3）的綠色面積，來觀察比率的變化：

下面中，我們可以看到，經過與綠面色積大小比率換算過的「危險率」，轉彎角度愈大，綠色面積雖然也愈小，但橘色面積佔有綠色面積的比率會變大，和危險的感受有相關，比較貼近實際生活的經驗，所以這樣的危險率計算是有可靠性的。

A	B	C	D	E	F
a (車軸長, 公尺)	θ (轉彎角度)	弧度換算 (Excel的要求)	橘色面積 (平方公尺)	綠色面積 (平方公尺)	危險率 (橘色面積/綠色面積)
2.0	1	0.017	5.270	17431.11	0.00
2.0	3	0.052	5.191	1938.29	0.00
2.0	6	0.105	5.073	485.69	0.01
2.0	9	0.157	4.954	216.60	0.02
2.0	12	0.209	4.835	122.35	0.04
2.0	15	0.262	4.714	78.66	0.06
2.0	18	0.314	4.592	54.88	0.08
2.0	21	0.367	4.468	40.90	0.11
2.0	24	0.419	4.343	30.50	0.14
2.0	27	0.471	4.215	23.17	0.17
2.0	30	0.524	4.085	17.80	0.23
2.0	33	0.576	3.951	13.84	0.28
2.0	36	0.628	3.815	10.87	0.35
2.0	39	0.681	3.674	8.59	0.43
2.0	42	0.733	3.529	6.71	0.53
2.0	45	0.785	3.380	5.11	0.66
2.0	60	1.047	2.541	4.31	0.59

加入理想路線面積的計算，危險率與角度的分析表

但有趣的是，橘色面積和綠色面積，在固定轉彎角度，改變車軸長度的表格中，對於危險率的計算是一個固定數字。在這個表格中，反而看到車軸長與危險率的高低沒有關係，又與生活的觀察不相同，因此，還需要再思考看看危險率還有沒有其他的可能因素需要考慮。

A	B	C	D	E	F
a (車軸長, 公尺)	θ (轉彎角度)	弧度換算 (Excel的要求)	橘色面積 (平方公尺)	綠色面積 (平方公尺)	危險率 (橘色面積/綠色面積)
2.5	30	0.524	2.417	11.84	0.20
3.0	30	0.524	3.776	18.50	0.20
3.5	30	0.524	5.439	26.64	0.20
4.0	30	0.524	7.402	36.27	0.20
4.5	30	0.524	9.668	47.37	0.20
5.0	30	0.524	12.236	59.96	0.20
5.5	30	0.524	15.106	74.00	0.20
6.0	30	0.524	18.278	89.00	0.20
6.5	30	0.524	21.752	108.00	0.20
7.0	30	0.524	25.529	125.00	0.20
7.5	30	0.524	29.607	145.00	0.20
8.0	30	0.524	33.988	168.00	0.20
8.5	30	0.524	38.670	193.00	0.20
9.0	30	0.524	43.655	218.00	0.20
9.5	30	0.524	48.942	244.00	0.20
10.0	30	0.524	54.531	271.00	0.20
10.5	30	0.524	60.423	299.00	0.20

加入理想路線面積的計算，危險率與車軸長度的分析表

## （二）內輪差面積與內前輪弧長的比例關係：

對於「急」轉彎中，可能考慮到的是路人反應的時間，如果太短，就會感覺到「急」的存在，也就是危險的存在。那在轉彎的時候，我們不大曉得會花多少時間來進行轉彎，但是我們可以知道，在固定車子的速度時，輪子走得愈遠、愈長，所要花的時間就愈多。那我們

可以用前輪的弧長（也就是扇形的弧長）來取代時間的預估囉！所以，我們將內輪差面積與前輪弧長進行比較，得到一種「危險率」的表現方式，如下圖：

A	B	C	D	E	F
車軸長（公尺）	轉彎角度	弧長換算（Excel的要求）	橘色面積（平方公尺）	前輪弧長（公尺）	危險率（橘色面積/前輪弧長）
2.6	1	0.017	5.270	234.01	0.02
2.6	2	0.032	5.101	78.04	0.07
2.6	3	0.105	3.073	39.07	0.13
2.6	4	0.157	4.954	26.11	0.19
2.6	12	0.209	4.835	19.64	0.25
2.6	15	0.262	4.714	15.78	0.30
2.6	18	0.314	4.592	12.22	0.35
2.6	21	0.367	4.468	11.40	0.39
	24	0.419	4.343		0.43
	27	0.471	4.215		0.47
	30	0.524	4.085		0.50
	33	0.576	3.951		0.53
	36	0.628	3.815		0.55
	39	0.681	3.674		0.57
	42	0.733	3.529		0.58
2.6	45	0.785	3.380		0.60
2.6	60	1.047	2.541	4.72	0.54

轉變  
角度  
愈大

危險率  
愈大

加入理想路線前輪弧長的計算，危險率與角度的分析表

A	B	C	D	E	F
車軸長（公尺）	轉彎角度	弧長換算（Excel的要求）	橘色面積（平方公尺）	前輪弧長（公尺）	危險率（橘色面積/前輪弧長）
2	30	0.524	2.417	6.28	0.38
2.5	30	0.524	3.776	7.85	0.48
3	30	0.524	5.438	9.42	0.58
3.5	30	0.524	7.402	11.00	0.67
4	30	0.524	9.668	12.57	0.77
4.5		0.524	12.236	14.14	0.87
5		0.524	15.106	15.71	0.96
5.5		0.524	18.278	17.28	1.06
6		0.524	21.752	18.85	1.15
6.5		0.524	25.529	20.42	1.25
7		0.524	29.607	21.99	1.35
7.5		0.524	33.988	23.56	1.44
8		0.524	38.670	25.13	1.54
8.5	30	0.524	43.655	26.70	1.63
9	30	0.524	48.942	28.27	1.73
9.5	30	0.524	54.531	29.85	1.83
10	30	0.524	60.423	31.42	1.92

車軸長  
長度  
愈長

危險率  
愈大

加入理想路線前輪弧長的計算，危險率與車軸長度的分析表

我們可以看到，在考量前輪弧長的情況下，在車軸長度增長，或是轉彎角度變大，都會看到危險率的增加。因此，「反應所需要時間」的確是危險率的一項因素。

綜合以上的看法，我們認為，車輛行進的危險率，可以用車輛危險率 =  $\frac{\text{內輪差面積}}{\text{理想路線面積}}$ ，或是

車輛危險率 =  $\frac{\text{內輪差面積}}{\text{內前輪轉彎所需弧長}}$ ，其中，較推薦的公式是「車輛危險率 =  $\frac{\text{內輪差面積}}{\text{內前輪轉彎所需弧長}}$ 」，當

然，這個危險率也是可以再轉換為公式，所計算出來的數字愈大，代表在轉彎時愈容易造成危險，不過我們就不再換算公式，留待以後有機會再來研究調整(算式愈來愈長了，好累T.T)。

### 三、車輛主動避免危險能力應可以再升級

如前面的資料新聞中，在2019年4月有人發明在大客車旁加裝發光線條，照射於地面上，讓用路人可以參考內輪差危險區域邊線，是一個很創新的想法。但是我們看動態新聞可以看到，這個燈條是固定的，也就是固定照出距離車輛側面約1公尺的寬度，就如同我們前一次所做的研究結論中，離大車愈遠愈好的觀念，但其實大家不是沒觀念，而是沒注意到，



所以除了不精準外，也可能因光線是上往下照，所以如果剛好投射到機車騎士的上方，也會有實用性不足的地方。

夫妻檔研發「內輪差警示燈」大車轉彎視線死角照給你



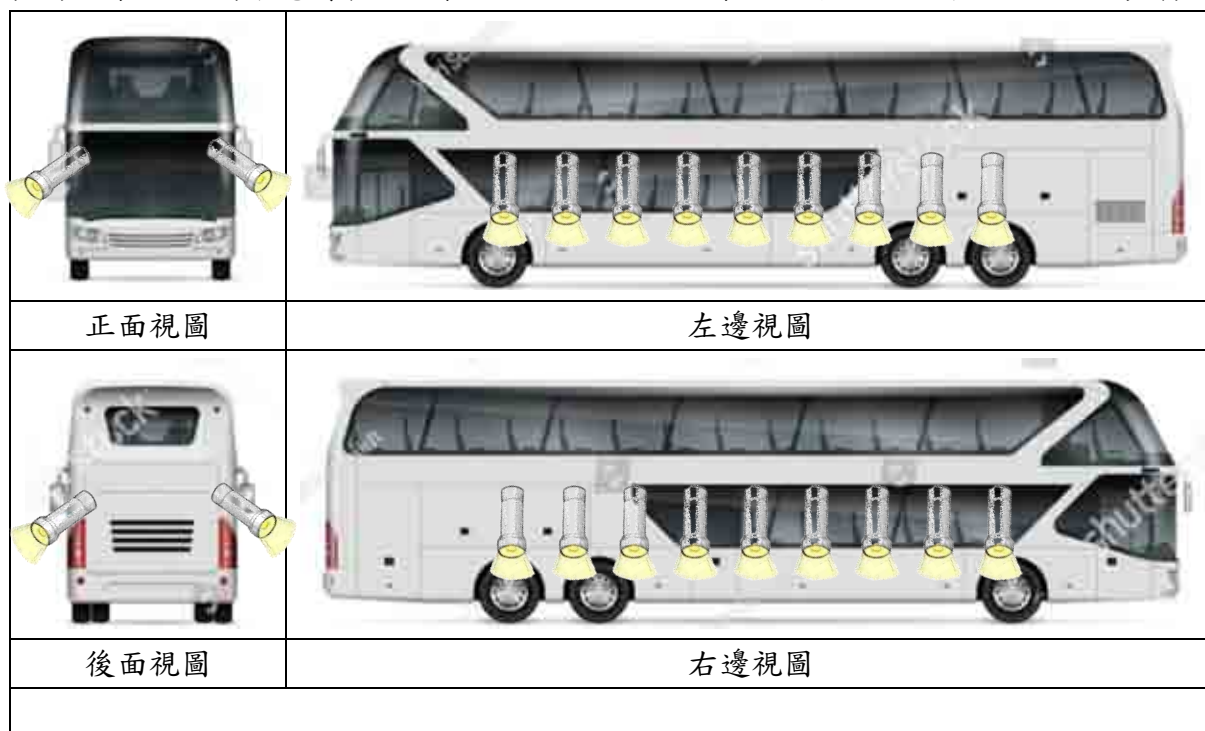
仔細看，地上有紅色的光線唷！

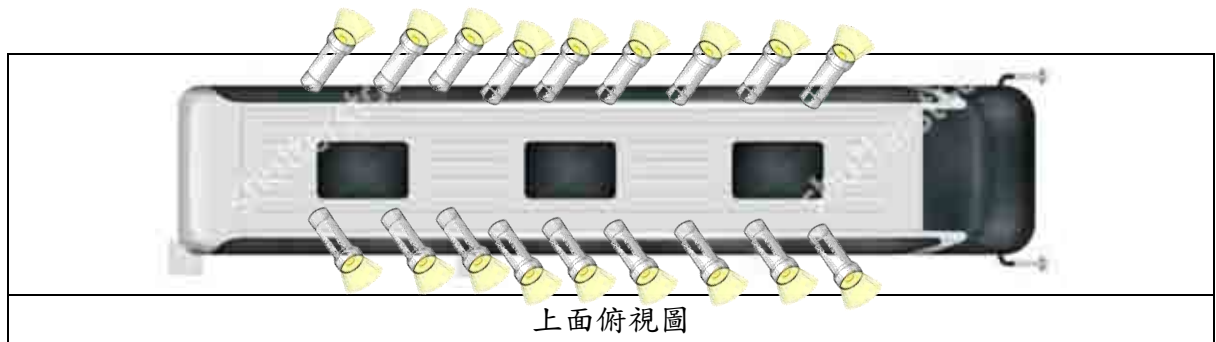
車輛旁加裝警示燈，可以提用路人大客車旁的安全範圍，但可能有兩個可以再更好的設計：

1. 車輛行進時不斷顯示地上直線燈，恐怕會因為其他用路人習慣性、適應性而產生忽略，未能達到警示效果。
2. 燈光照射方向恐會影響用路人的眼睛。
3. 設計採用固定式燈光，也就是將距離設定在離車子約 1 公尺(車子以 3 公尺寬)來顯示，在實際的道路上可能實用性不足，尤其是在二~四線道路上，兩側的機車騎士就會出現無法暫停的空間了。

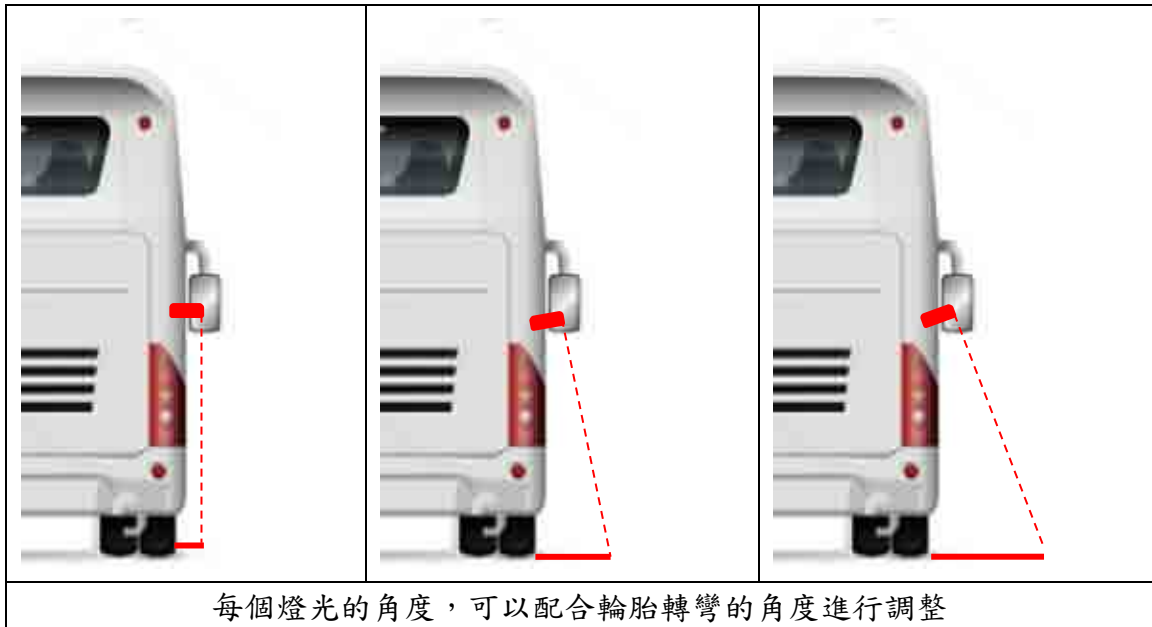
因此，我們發想，將我們在這次研究中所討論的「離多遠才安全」公式，應用在這個燈條技術上，再加上感應雷達提醒駕駛，我們認為應該可以減少許多不必要的危險，利人又利己。安裝建議如圖說明：

(一) 安裝位置：(手電筒表示安裝燈光的位置，以安裝兩側各 9 個，共 18 個燈光為例)

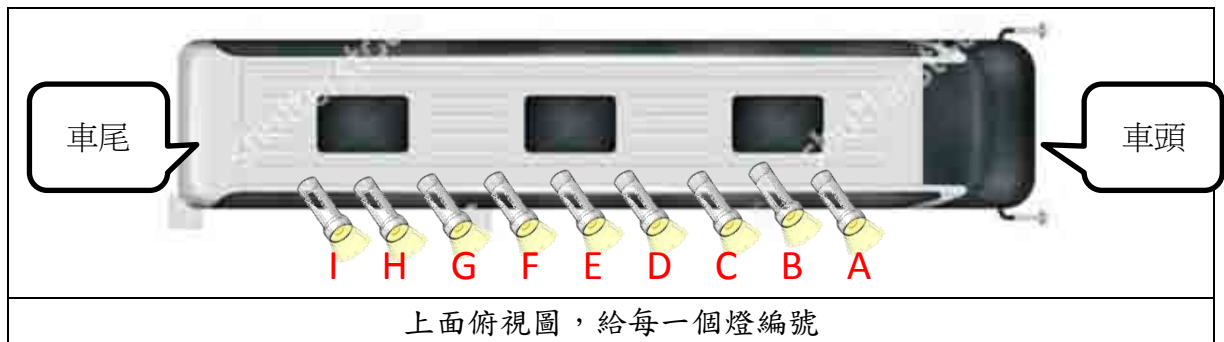




(二) 燈光照射的原理：只要改變照光角度，就可以改變地面燈光的長度。



(三) 照射長度與角度換算：Excel 真是超好用的！



紫色的線就是每個燈要照射的長度，從前輪到後輪都不同，但是都可以算得出來，因為改變的是車軸長度的不同。在「離多遠才安全」中，我們發現：

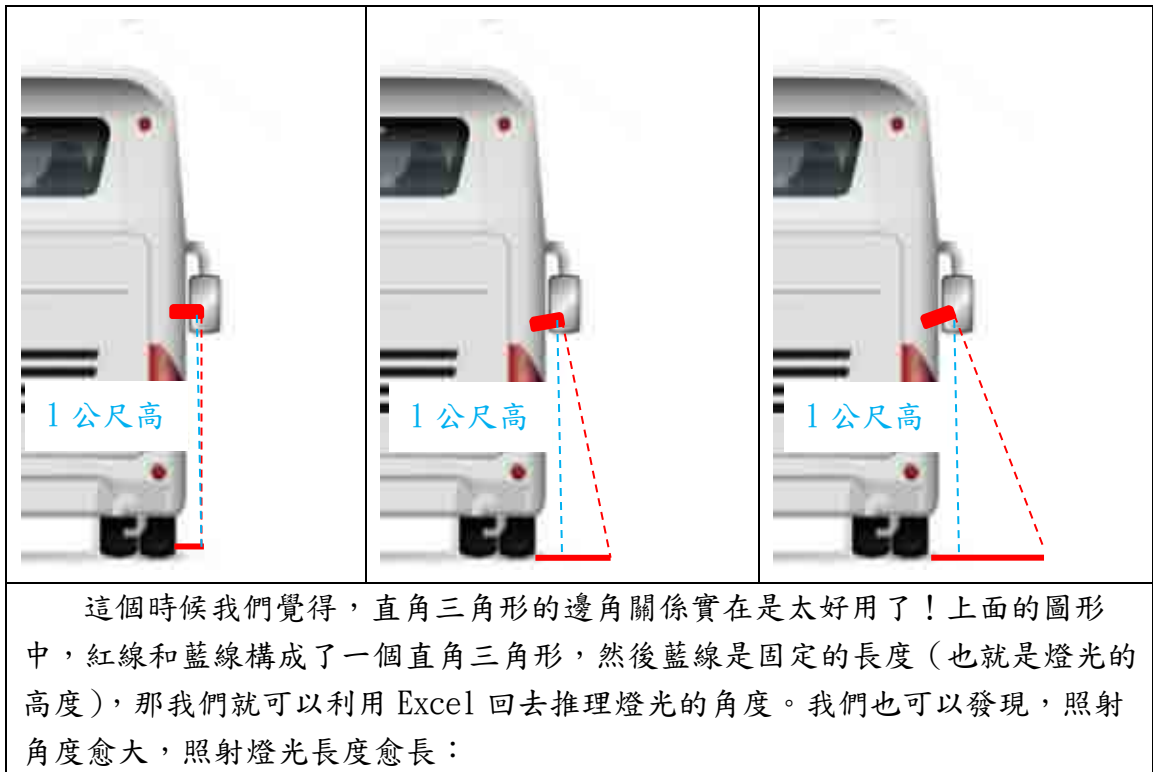
A 紫色線段的長度 =  $a(\cot\theta - \sqrt{\cot^2\theta - 1})$

因為 B 的位置在 a 長度的  $\frac{7}{8}$ ，所以

B 紫色線段的長度 =  $\frac{7}{8}a(\cot\theta - \sqrt{\cot^2\theta - 1})$

其他紫線依此類推喔！

#### (四) 把燈光照射長度換成是燈光角度



#### (五) 上面的設置結果，用 Excel 來試試看吧

A	B	C	D	E	F	G
燈光編號	(車身長, 公尺)	位置軸長比例	θ (轉彎角度)	弧度換算 (Excel 的弧度換算)	距離多遠才安全 (公尺)	1 公尺高燈光照射高度 (度)
A	10	1	5	0.087	0.438	23.6
B	10	0.875	5	0.087	0.383	21.6
C	10	0.75	5	0.087	0.329	18.2
D	10	0.625	5	0.087	0.274	15.3
E	10	0	5	0.087	0.218	12.4
F	10	0	5	0.087	0.164	9.3
G	10	0	5	0.087	0.110	6.3
H	10	0	5	0.087	0.055	3.1
I	10	0	5	0.087	0.000	0
A	10	1	10	0.175	0.889	49.8
B	10	0.875	10	0.175	0.778	43.7
C	10	0.75	10	0.175	0.666	37.6
D	10	0.625	10	0.175	0.555	31.5
E	10	0.5	10	0.175	0.444	25.4
F	10	0.375	10	0.175	0.333	19.3
G	10	0.25	10	0.175	0.222	13.2
H	10	0.125	10	0.175	0.111	6.3
I	10	0	10	0.175	0.000	0

各燈光編號

遠離車子的距離

在前輪轉 5 度和 10 度時

燈光改變角度

看起來應該是可行的，但接下來可能要研究一下機械原理和使用一些程式來嘗試看看囉！如果這個燈光可以搭配「感應」功能，這樣的計算也可以減少感應的錯誤判斷機會了（例如說，將兩側人行道、電線桿都當作是行人而發出警示、警報聲響）。

#### 四、用路人及駕駛安全提示系統




##### (一) 使用燈光提示用路人已進入危險區域：

就像第三點提到的，我們可以在車身兩側加裝直線燈，在車輛有轉彎訊號傳入時，以依車身長位置、方向盤彎角及燈飾高度，運用齒輪將燈進行旋轉，此時照射於地面上的光線與車身間所形成的空間，就是危險範圍了。此次小組成員僅能討論理論而未能實現，實因 3D 列印又是另一門該學習的重點，因此本項目就留待往後實踐。

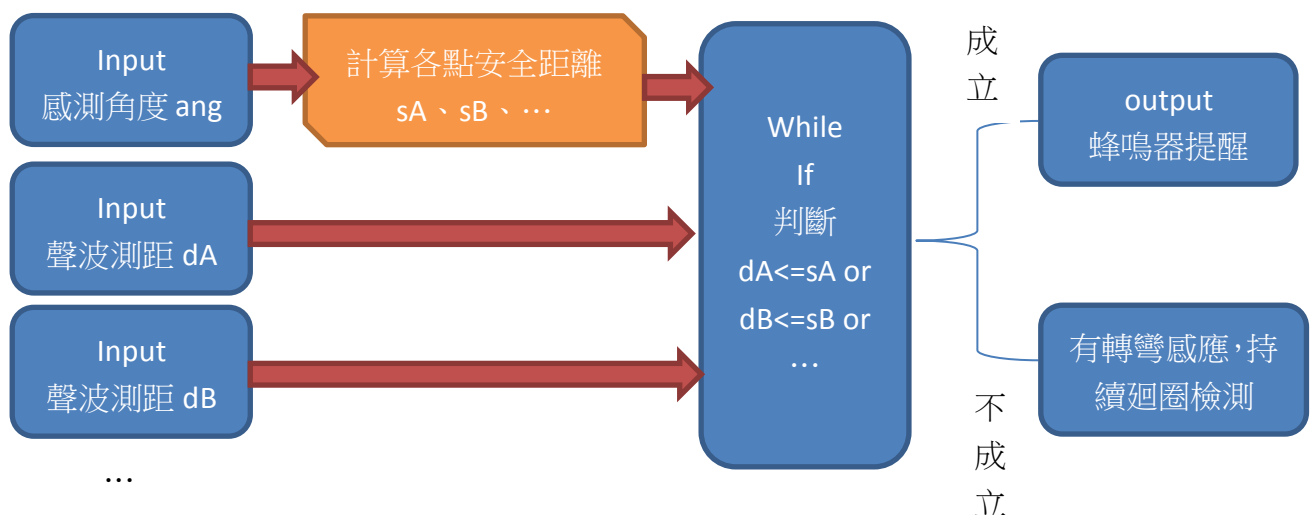
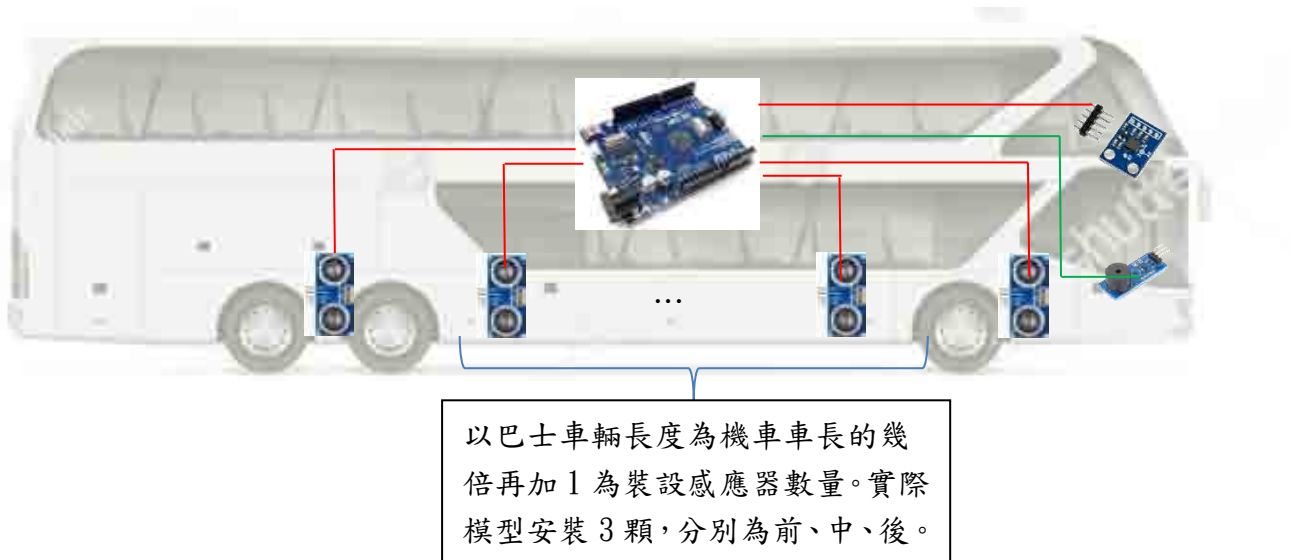
##### (二) 使用測量與車身旁用路人距離判斷，給予駕駛警示回饋機制。

由於內輪差（向右轉）危機多發生於前輪與後輪間，因此以平面距離來看，只要在車身各個位置，遠離一定範圍，就能確保安全。這個範圍是由駕駛轉彎角度所影響，因此，我們需準備兩項檢測傳輸模組：

1. 角度傳輸模組：檢測巴士轉彎角度，使回公式計算。
  2. 聲音測距模組：當實際測距距離小於安全範圍直線距離，傳輸警報機示警駕駛。
- 因此，我們所運用到的模組如下圖：

		
HC-SR04 超音波測距	GY-61 ADXL335 三軸重力加速度 角度感測器	無源蜂鳴器模組

運用上圖所示模裝，裝置於巴士模型上，如圖示





## 柒、結論

一、車軸長和轉彎角度是影響內輪差面積大小的重要因素。

從我們整理出來的公式，內輪差面積 =  $(\frac{1}{4}a^2)(2\cot\theta + 3.14 \times (1 - \frac{\theta}{90}\csc^2\theta))$  可以看出，因為算式兩個括號中所用的符號都各只剩下一個，因此可以知道我們將這個內輪差面積整理成兩個主要因素-「a：車軸長」和「 $\theta$ ：前輪轉彎角」；而在公式之中我們可以知道，固定轉彎角，車軸長 a 愈長，內輪差面積會愈大；但固定車軸長 a 時，因為轉彎角  $\theta$  還要經過查表處理，所以面積的變化就比較不好推理了。

藉由 Excel 軟體的幫助，內輪差面積因為車軸長愈長，面積愈大，但因為轉彎角度愈大，面積愈小。其中，因車輛較大、車軸長較長，危險較大的情形，較容易被接受；但是轉彎角度愈大，如果因為內輪差面積較小而被認為較安全的話，跟實際生活的經驗較不同，大不能被接受。

二、結合科技和程式設計，多一分提醒，少一分危機！加裝於車側的聲波測距器，可以裝於車底測量與用路人的距離來避免危險，也可裝於車頂，用於測量與山洞、山壁間的距離，減少大型車輛經過這些地方發生碰撞的機會。

三、加裝應用數學所計算投射的感應燈光，照射於地面或是雷達感應提醒。

靜靜的燈光容易讓人忽略或是不注意到，如果是結合前輪轉彎角度產生不同的內輪差區域光線，讓用路人可以感受到「不同」的道路情況，結合我們前一次研究的建議，在車身上畫出安全線，在轉彎時加上聲音提醒外，更在地面上照出轉彎危險區域參考圖，如果這個時候採用的是光線雷達感測或是高度感測儀器，立刻回饋給大客車駕駛車身邊的狀況，我們認為可以大大地提升車輛的安全性，保障用路人的安全。

以上三點結論在數學研究社的最後歸納階段成形時，真是令我們雀躍不已！原本我們以為去年的自己已經對內輪差研究有了基本以上的認識，但在今年再接再厲的研究後，又發現了更多有意義的結論！過程中還因為想更進一步的探討內輪差，跟著老師的引導、教學，讀懂了一些去年完全看不懂的國中科展三角函數，越來越有成就感！也越來越佩服數學在生活中發揮的功用！希望今年的新結論，能對交通安全教學、推廣及應用有更大的幫助，也希望透過結合數學的知識及科技軟體的研究過程，讓人知道學數學不是只在課堂上！

## 捌、參考資料及其他

1. 角與角度。三年級數學。翰林版課本。
2. 圓面積。六年級數學。翰林版課本。
3. 比與比值。五年級數學。翰林版課本。
4. 搞「軌」一有「跡」可循。王亭亭等四人，新竹縣立竹北國民中學。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會最佳鄉土教材獎。
5. 危險的距離—死神的區域內輪差。張毓文等三人，桃園縣立楊梅國民中學。中華民國第五十四屆中小學科學展覽會作品。
6. JIMI 陪你玩 ROBOT。https://jimirobot.tw/arduino-tutorial-ultrasonic-sensor-501/
7. 常見三角函數公式。https://wywu.pixnet.net/blog/post/27411230。