

# 教育部 103 學年度中小學科學教育計畫專案

## 總報告

計畫編號：067

計畫名稱：尋找數形規律：國小數學創新教材教法之研究

主持人：曾志華

執行單位：嘉義市興安國民小學

2015 年 8 月 27 日

## 摘要

本研究目的乃希望能夠透過一項創新教材教法的發展研究，包括提供一套較有系統尋求規律的數學內容以及配合創新的教學模式，以提升小朋友的覺察能力、解題能力以及美的感受和快樂學習。研究問題如下：

- 一、形的規律、數的規律、形數規律及數形規律情境等四種型態創新的內容如何？
- 二、尋求數形規律能否有助提升學童的覺察能力？
- 三、尋求數形規律能否有助提升學童的解題能力？
- 四、國小學童對於尋求數形規律的學習活動感受如何？
- 五、佈題→引導觀察→臆測或猜想→描述看到的規律→試驗→發現規則  
→一般化(推廣應用)的創新教學模式成效如何？

運作的模式：首先，由計畫主持人帶領成員進行教師學習(數學社群)，再將學習成果帶進教室進行試驗，教師是佈題者的角色，學生為解題者，也是學習的主角。教師蒐集學習者的表現(回饋)，回到社群研討並將教材精緻化(e化)，再進行下一次的循環學習。本研究以合作行動研究(co-operative action inquiry)法進行。並以研究者任教的四年級四個班級及五年級一個班為研究對象，參與本研究計畫之國小四、五年級學童共約140名。

研究結果顯示，本研究已開發創新教教材，包括「尋找數的規律」(2件)、「尋找形的規律」(1件)、「尋找數形規律」(2件)及「尋找數形情境規律」(1件)。尋找數學規律之創新教學模式修正為：佈題→引導觀察→臆測或猜想→描述看到的規律，學生如果無法描述規律，必須折返改變略策再引導觀察，再臆測猜想，接著再描述看到的規律。如果能描述看到的規律則接下去試驗此規律數次之後，讓學生發現規則，再做練習題加以一般化推廣或應用。受試者在接受本計畫創新教材教法的研究之後，對於數學學習的感受和態度普遍都是積極正面的改善。參與本研究的140名學生之中，低成就的學生經教育部補救教學科技化評量網站測驗，雖然還有5名不及格(佔8%)，但數學學習成效仍令人滿意。

# 尋找數形規律：國小數學創新教材教法之發展研究

## 壹、研究背景及目的

本計畫的基本理念源自於荷蘭現實數學教育(Realistic Mathematic Education, [RME])的哲學思想，視「數學是一種人類的活動」(mathematics as a human activity)，其中的「活動」包括：尋求問題、組織材料(subject matter)以及解題的活動(Freudenthal, 1991)。

學生在數學學習與解題的活動，也可以說是規律的尋求活動。規律(pattern)是無所不在的，而且人類本來就是尋求規律的動物(曹亮吉，2003)。人們在所處的生活環境裡，會不斷以找尋規律的態度來發現所在領域的問題，並且依照所覺察出的規律，或抽象化的概念來面對，及解決可能發生的問題(郭國清，2006)。九年一貫課程的基本理念也指出，我們周遭的自然與社會環境中，到處可見數與形，而各種數與形都有一些規律；數學所探討的就是這些規律(教育部，2003)。由此可見數學可以說是一種尋求規律的科學(洪明賢，2003；黃敏晃，2000；鄭毓信、李國偉，1999；曹亮吉，2003)。數學的學習與規律的尋求有著相當密切的關聯，身為小學基層的教育工作者，進行數學教學時，引導學生尋求數學規律，將是一個正確可行的方向。

在數學教學現場裡，我們很輕易就能夠找到很多與數學規律有關的題目。像是低年級的「 $5 \rightarrow ( ) \rightarrow ( ) \rightarrow 25 \rightarrow 30$ 」；中年級的題目「37, 98, 45, 324, 621是偶數學圍起來」；高年級「一張長方形紙張連續對摺4次後，沿著折線剪開可分成幾個長方形？」甚至，教室外的大自然裡，一年四季的變化、動物花草樹木的特徵，以及十二生肖與嬰女出生率的關係，也都存在著某種規律的變化。探究這些規律，充滿了樂趣和美感，不僅僅能夠提升學生對週遭環境的覺察能力和解題能力(郭國清，2006)，也能夠享受學習數學的樂趣及欣賞數學之美，進而關懷所處生活環境的人、事、物。只是目前的教育現場裡，尋求規律的數學內容仍然不是很有系統，例如，形的規律、數的規律、形數規律及數形規律情境等四種型態(洪明賢，2003；郭國清，2006)的呈現就沒有系統。老師面對這些題目時，多只是「碰到什麼就教什麼」。想要提供學生一套完整有系統、情境豐富的數學問題，仍然還有很大的學習空間。

基於此，本研究目的乃希望能夠透過一項創新教材教法的發展研究，包括提供一套較有系統尋求規律的數學內容以及配合創新的教學模式，以提升小朋友的覺察能力、解題能力以及美的感受和快樂學習。研究問題如下：

題能力以及美的感受和快樂學習。研究問題如下：

- (一)形的規律、數的規律、形數規律及數形規律情境等四種型態創新的內容如何？
- (二)尋求數形規律能否有助提升學童的覺察能力？
- (三)尋求數形規律能否有助提升學童的解題能力？
- (四)國小學童對於尋求數形規律的學習活動感受如何？
- (五)佈題→引導觀察→臆測或猜想→描述看到的規律→試驗→發現規則→一般化(推廣應用)的創新教學模式成效如何？

## 貳、研究方法及實施步驟

### 一、研究方法

為共同解決發展創新教材教法的過程中所面臨的問題，本研究以合作行動研究（co-operative action inquiry）法進行。研究的焦點在於數形規律四種型態（洪明賢，2003；郭國清，2006）教材內容的創新研發，以及配合教材實踐，發展創新教學模式，並且觀察學童的覺察能力、解題能力的成長及對數學學習的感受。期間需要透過蒐集資料、腦力激盪、內容分析及訪談等技術蒐集資料，並且共同反省思考、交互辯證，發掘困難與改善行動，故也是一種實施研究（implementation research）（Thomas, 2000）。研究者以互惠（reciprocal）的研究態度，俟有成效之後在學校例行期末課程實施成果發表會進行分享與推廣。合作行動的過程中，研究者以經驗和反省（reflexive）之間的覺醒和自我批判的歷程，不斷的自我修正和調整研究的方向，並且形成一個的循環，直到解決問題為止（夏林清等，1997；蔡清田，2000；甄曉蘭，2001）。

### 二、研究對象

為解決教學現場的問題，故以研究者任教的四年級四個班級及五年級一個班為研究對象，並且已獲得其他這幾位老師同意，願意加入成為協同研究人員，參與本研究計畫之國小四、五年級學童共約 140 名。

### 三、實施步驟

本研究實施步驟如下：

1. 文獻探討：為尋求發展創新教材教法的問題解決途徑，研究者先透過文獻資料的蒐集、研讀及整理過去在嘉義大學兼課多年教授「國小數學科教材教法」自編講義中，找尋可行的資源及解決方式，作為規畫進行研究的參考基礎。

2. 尋求合作夥伴：參與本研究的本校五位同事，一位是主任，曾和研究者共同指導學生參與科展；三位是同學年老師；一位是六年級老師，教學年資均超過十年，過去兩年都曾參與研究者成立的數學教師社群，對於教材研發及教學研究有豐富經驗。

3. 預試：研究者於 102 學年度在學校成立數學教師社群，活動的主題即「樂活數學~尋找數形規律」，我們曾經探討過「超級偶數」（super even）、「小數除以整數時小數點向右移的規律」、「計算日期何時加 1？何時減 1？的情境規律」、「嘉義檜意森活村日式窗戶排列形的美學原理」、「珍珠一串紅的葉子排列方式」，以及探討「兩位數乘以兩位數計算正方形面積的規律」，並以此主題指導學生參與科展（附件一）。研究發現，學生學習興趣高昂，覺察能力變敏銳了，解題或計算能力有提升，更重要的是快樂學習和主動學習的精神也很明顯。因此，希望藉此研究計畫，繼續發展作有系統更深入的研究。

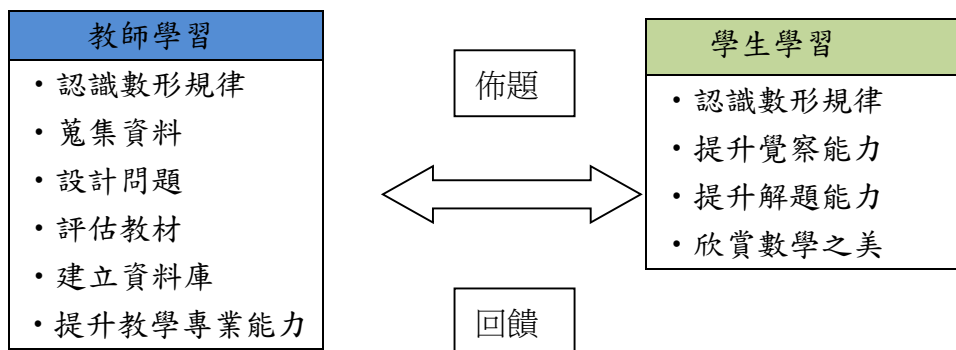
4. 正式研究：

(1) 召開說明會：由召集人主持，共同訂定本計畫運作的時程、運作模式及內容。

(2) 運作時程：自 103 年 8 月至 104 年 7 月底，為期一年。1. 固定聚會：每個月兩次研

習：星期四晨會時間(7:50~8:30)，及週三下午(13:30~16:00)教師進修時間。2. 除固定聚會討論之外，成員之間也會利用學年會議或其他沒課的時間，透過面對面或網站平台展開專業對話。

(3)運作模式如下：首先，由計畫主持人帶領成員進行教師學習，再將學習成果帶進教室進行試驗，教師是佈題者的角色，學生為解題者，也是學習的主角。教師蒐集學習者的表現(回饋)，回到社群研討並將教材精緻化(e化)，再進行下一次的循環學習。進一步說明如下：



### A. 教師學習

1. 認識數形規律：依據洪明賢(2003)和郭國清(2006)的研究論文，尋求規律在數學領域裡要探索的內容至少包括：形的規律、數的規律、數形規律和形數規律等四部分。

(1)形的規律：圖形依某種規律排列成特殊的幾何圖形，例如：



(2)數的規律：一群不含任何情境的數字依某種規律排成序列，例如：

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow \dots$$

(3)數形規律：形數依某種規律排成序列，例如：



(4)數形規律情境：具有情境意義的規律問題，例如：

時鐘在1點整會敲1下，2 點整敲 2 下，依此規律從1 點到12 點，時鐘總共敲了幾下？

本研究計畫主持人畢業於彰師大科教所博士班數學組，在嘉大兼課教授「國小數學科教材教法」多年，對數形規律的研究有一些心得(曾志華，2006)。在計畫開始實施階段會帶領團隊教師，有系統的認識數形規律及研習如何欣賞數學之美(如下圖1)。

2. 蒐集資料：包括在現實生活中，自然、社會及藝術與人文領域，數學課本或科普書籍，像是天下文化出版的「大自然的詩篇」等。網站上也很容易找得到有關數學之美(圖1)及數學規律相關的內容和素材(例如：(包括荷蘭現實數學RME，美國在脈絡數學MiC, 1997，其中有一冊是Patterns and Symbols)。但是這些素材並不一定適合作為班級學生學習的教材，我們會根據形的規律、數的規律、數形規律和形數規律等四部分，搭配「數與量」、「幾何」、「代數」和「統計與機率」四個數學主題。進行資料蒐集，並且透過內容分析、討論和篩選的過程來確保教材的適切性。計畫參與教師在101學年度就參與本校數學教師社群，曾聚焦於「優質數學題目」的設計與研討一年，教師們對於好的問題情境有一定的認識，透過篩選和修正的機制提供學生有意義的學習材料。



圖(1) The Beauty Of Mathematics (引自：

<http://www.slideshare.net/honan4108/the-beauty-of-mathematics-1109422>)

3. 設計問題：當我們蒐集的素材不適當或不夠用時，便會鼓勵團隊老師自行創新設計或改良題目，供學生解題。例如：

(1) 填入適當的數：3090→3100→3110→( )→( )

(2) 填入適當的數：3090→( )→( )→3120→3130

第(1)題依照學生的習慣，會順著做**每次都加十**的規律運算，很容易找到最後的答案是3120和3130。但這樣的題目就不如(2)題，學生看到3090之後必定不知道接下來要加多少？這會造成認知上的衝突，然後在3120和3130之間找到做**每次都加十**的運算規律解決了認知上的衝突，它可以「倒回去每次都減十」先找到3110，再找到3100。也可以從頭3090每次都加十得到答案。因此，我們會篩選第(2)題及設計類似題，讓學生解題。

4. 評估教材：分教學前和教學後兩階段。教學前評估教材的適用性，適合哪一個年級使用？與哪一個能力指標相符？預期學生能夠學到什麼？教學後評估教材的妥適性及有效性，不妥或無效的題目則提出修正或替換。這些問題都會在社群聚會時間提出來討論。

5. 建立資料庫以利推廣及應用：本團隊實驗之後，有效的數形規律的優質數學題目都會蒐集起來，依年段分類並儲存於學校專屬網站之中(興安教師社群專業網站：<http://school.haes.cy.edu.tw/web/pro/>)，並持續發展題目，充實資料庫，且免費提供全校或校外有需要之數學教學工作者使用。

6. 提升教師教學專業能力：在團隊研習期間，我們會提出引導學生做數學規律尋求時所

遭遇到的問題，合作討論提供可行的解決方案，教師經由反思和解決教學上的問題，不斷提升其本校教師的數學教學專業能力。

## B. 佈題

即實際教學。根據美國數學教師協會（NCTM, 2000）提出，學生在具體的情境或數列中探究規律，一開始能臆測，以口語來描述此規律關係，接著發現規律的認定與規則辨識，最後歸納出一般性的抽象通則化，這種從具體到抽象的思考方式，也就是代數思維的核心。因此，教師在實際教學中，我們會鼓勵老師嘗試一種創新的教學模式，也就佈題→引導觀察→臆測或猜想→描述看到的規律→試驗→發現規則→一般化(推廣應用)的方式引導教學。

讓學生尋求規律的教學方式，不僅有助於覺察和推理能力的發展，進而關心自己週遭的人、事、物的變化並解決問題；透過規律的教學，也能幫助學生學習較完整的數學和修正的機制提供學生有意義的學習材料。例如，3.567的10倍是多少？100倍是多少？1000倍是多少？歸納出每增加10倍，小數點就往右移一位的概念。另外，也能藉由數和圖形規律的結構，來引導學生學習欣賞數學之美及引起學童對數學學習的興趣。

在評量方面，與教學結合並兼顧形成性評量及總結性評量。例如：教師會在學生「臆測或猜想→描述看到的規律→試驗→發現規則」的階段進行形成性評量；在「一般化(推廣應用)」的階段進行總結性評量。

## C. 回饋

回饋就是來自於學生學習成效的評估。老師們透過觀察學生上課解數形規律問題的反應及作答情形，來評估題目的妥適性和有效性，然後在團隊研習的時候提出來討論，共同思考解決的方案。

## D. 學生學習

學生尋找數學規律至少包括：形的規律、數的規律、數形規律和形數規律等四部分。這四部分的數學內容開發及創新教學活動模式，是本計畫運作的重點所在，學生的學習也將比以往更完整、有系統。並有助於學生覺察能力、解題能力的提升以及能夠欣賞數學之美。學生學習數形規律的相關能力指標如下：

- 1-n-07 能進行2個一數、5個一數、10個一數等活動。
- 1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。
- 1-s-05 能描述某物在觀察者的前後、左右、上下及兩個物體的遠近位置。
- 2-n-08 能理解九九乘法。
- 2-n-12 能認識「年」、「月」、「星期」、「日」，並知道「某月有幾日」、「一星期有七天」。
- 4-n-08 能理解等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。
- 4-a-02 能將具體情境中所列出的單步驟算式填充題類化至使用未知數符號的算式，並能解釋式子與原問題情境的關係。
- 4-d-01 能報讀生活中資料的統計圖，如長條圖、折線圖與圓形圖等。
- 5-n-04 能用約分、擴分處理等值分數的換算。
- 6-n-10 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同6-a-03)
- C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。

- C-R-02 能察覺數學與其他學習領域之間有所連結。
- C-R-03 能知道數學可以應用到自然科學或社會科學中。
- C-R-04 能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。
- C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。
- C-T-02 能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出。
- C-T-03 能把情境中與數學相關的資料資訊化。
- C-T-04 能把待解的問題轉化成數學的問題。
- C-S-01 能分解複雜的問題為一系列的子題。
- C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵。
- C-S-03 能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。
- C-C-04 能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。
- C-C-05 能用數學語言呈現解題的過程。
- C-C-06 能用一般語言及數學語言說明解題的過程。

7. 資料蒐集及整理：為瞭解教學成效並且作為修正改進教學模式的參考，擬透過前、後測蒐集量化資料作為評估教學成效的參考。使用工具如下：(1)教育部國民小學及國民中學補救教學科技化評量 <https://exam.tcte.edu.tw> 作為學習成效的評估；(2)數學學習態度問卷：修改自國立台灣師範大學教育學院數位學習研究室編輯之數學科學習態度量表 [http://elearning.ice.ntnu.edu.tw/doc\\_down.asp?dsn=1536](http://elearning.ice.ntnu.edu.tw/doc_down.asp?dsn=1536)。(3)我們也會蒐集其他質性資料：如觀察札記、評量單、學習單、教學錄影(音)、教學日誌及電腦網路資料庫記載資料等，儘量蒐集完整資料以作為客觀分析的基礎。

8. 分析研究資料：(1)量化資料採描述性統計分析及 t 檢定以瞭解學童覺察能力、解題能力的成長改變情形，及數學學習的感受；(2)觀察札記、評量單、學習單等質性資料以內容分析及歸納分析為主，並作為量化分析之佐證資料。行動研究是一再的循環解決教學問題的過程，所以，觀察、計畫、教學行動、蒐集分析資料，再透過同事之間的討論對話與反思。最後，綜合分析回答本研究提出的問題。

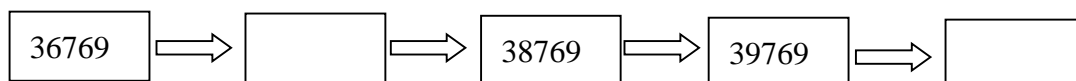
9. 將研究過程及結果寫成研究報告，並在適當時機發表(如學校週三研習、科學教育學術研討會、嘉市國中小學教師論文競賽、全國教師進修網電子報或其他科教期刊)，以分享有興趣之教學實務工作者或研究者。

## 參、研究成果：

### 一、創新教材實例

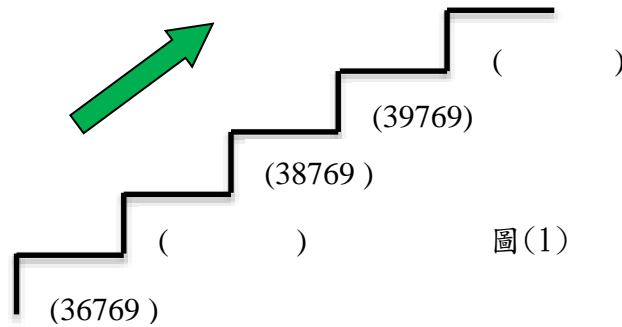
#### (一)數的規律

在本學期四年級數學(部編版)第一單元一億以內的數，其中有一部分是要小朋友透過數數的方式，學會”每多少個一數”然後知道這些大數進退位的概念。課本會先有簡單的十萬以內的數喚起舊經驗，我們發現課本或習作的題目類型，不論數字由大到小，或由小到大都是由左而右書寫的：



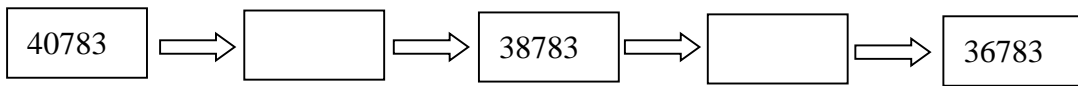


許多小朋友缺乏較大數字的數數概念，又掌握不到規律，這類型的題目常常填錯。我們透過社群腦力激盪之後，數字由小到大的排列方式我們改成圖(1)的方式，加上階梯及箭頭的提示，答對率可以從原本橫式的 85% 上升到 95% 以上。

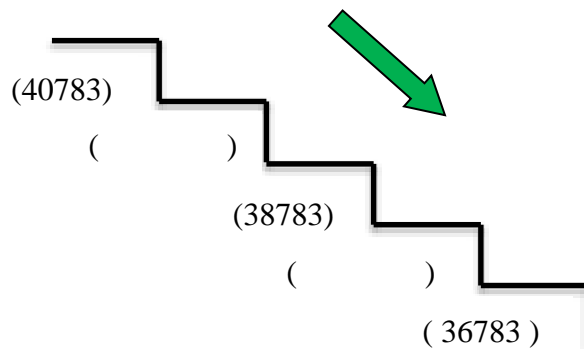


圖(1)

課本數字由大到小的排列方式如下：



經過我們討論之後改成圖(2)的方式，加上階梯及向下箭頭的提示，答對率也一樣可以從原本橫式的 85% 上升到 95% 以上。我們曾經問過幾位小朋友，他們都說加了階梯和箭頭提示比較不會錯。



圖(2)

## (二)形的規律

圖(3)是形的規律，我們的問題很簡單：「小朋友!請你說說看，你看到的圖形是什麼?有什麼變化?圖形給你的感覺是什麼?」100%小朋友都說是「斑馬線」，有趣的是問到「有什麼變化?」時，一半以上的小朋友都會說「愈來愈短」，然後少數(不到三分之一)的同學會反駁「你沒有走過斑馬線嗎?一樣長啊!」接著，那些說「愈來愈短」的小朋友，有的一臉狐疑的樣子，有的則恍然大悟，七嘴八舌吵了起來…。老師最後請他們放學回家時，在馬路上找答案。至於問到「圖形給你的感覺是什麼?」小朋友回答「很整齊」。



圖(3)

「很乾淨」、「很有規律」。研究者對回答「很有規律」的小朋友感到好奇，也對於沒有小朋友回答「感覺很美有點失望」。回答「很有規律」的小朋友很聰明，他說「這條斑馬線很有規律，看起來愈來愈短，可是實際上卻都一樣長」。

我問全班小朋友「為什麼會這樣？」沒有人答得出來，我請小朋友自行上網去找資料。

## 二、已開發的創新教學素材

本研究目前已開發創新教教材，包括「尋找數的規律」、「尋找形的規律」、「尋找數形規律」及「尋找數形情境規律」表列如下：

	目標	單元活動	對應能力指標	節數
尋找數的規律(一)	尋找計算的規則、察覺尋找規律的優點	三上 一 認識 10000 以內的數	1-n-07 能進行 2 個一數、5 個一數、10 個一數等活動。 C-C-06 能用一般語言及數學語言說明解題的過程	1 節(40 分鐘)
尋找數的規律(二)	尋找計算的規則、察覺尋找規律的優點	三上 五除法 (三位數 除以一位 數的除 法)	相對應能力指標： C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。 C-C-04 能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。	1 節(40 分鐘)
尋找形的規律(一)	尋找圖形規律及性質、認識正方形	三上 4-4 認識 正方形	1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。 C-S-03 能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。	1 節(40 分鐘)
尋找數形規律(一)	能察覺旋轉角的旋轉程度和角度的關係，且能用量角器測量；認識順時針與逆時針方向旋轉的旋轉角。	四上 三 認識 角度	4-n-14 能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度與畫出指定的角 4-s-05 能理解旋轉角的意義 C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。 C-R-02 能察覺數學與其他學習領域之間有所連結。 C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。	1 節(40 分鐘)
尋找數形	尋找計算正方形	四下 三	3-s-06 能透過操作，將簡單	4 節(160 分)

規律(二)	的規律	周長與面積	<p>圖形切割重組成另一已知簡單圖形。</p> <p>4-n-17 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並做相關計算。</p> <p>C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。</p> <p>C-T-02 能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出。</p> <p>C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵。</p> <p>C-S-03 能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。</p>	鐘)
尋找情境的規律(一)	尋找情境中解題的規律	三下 三日的 加減計算	<p>3-n-11 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並作時或分同單位時間量的加減計算。</p> <p>C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。</p> <p>C-T-02 能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出。</p> <p>C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵。</p> <p>C-S-03 能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。</p>	1 節(40 分鐘)

### 三、創新教學模式

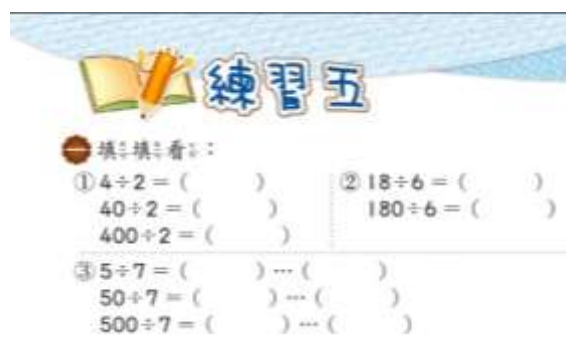
#### (一)實際教學試驗

本研究希望老師佈題讓學生尋找數形規律的過程中，能夠透過佈題→引導觀察→臆測或猜想→描述看到的規律→試驗→發現規則→一般化(推廣應用)的創新教學模式讓孩子學習數學。我們在班上曾經做過一個例子，發現學生掌握了規律之後，學習動機變高了，甚至產生「跳躍學習」。說明如下：

學生在複習上學期(三下)的除法時，課本的練習五

只給了圖(4)的內容，數學社群的老師認為課本的用意只是希望學生學會「三位數除以一位數」

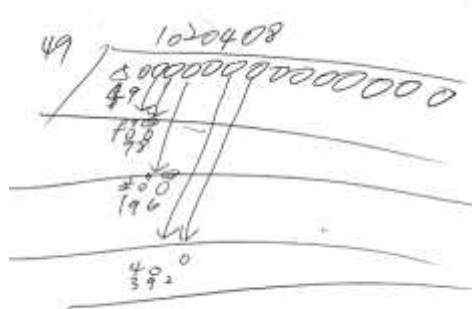
就可以了。我覺得似乎可以延伸讓小朋友找規律。於是我在黑板布題如圖(5)，把  $500 \div 7$  再加入  $5000 \div 7$ 、 $50000 \div 7$ 、 $500000 \div 7 \dots$ 。其實已經超過他們能理解的程度了。首先，我引導不要在乎答案的對錯，先觀察餘數的變化，然後猜猜看下一個餘數會是多少？結果有小朋友發現「餘數再加一個0，除以7就可以得到下一個式子的餘數，不用那麼多位數除以7」我們聽了感到很神奇，也很有趣。我和小一起實際除除看，試驗幾次之後，證實了餘數的規律是513264一直循環，同時，班上小朋友們也發現了商也存在著規律，即714285循環。更意外的是，下課了，我發現幾位小朋友仍然留在教室拼命地算著，不願下課，我看到他們的「作品」(如圖6和圖7)，內心不禁~哇!一聲，多美的算式呀!我看到了「跳躍學習」。



圖(5)



圖(6)



圖(7)

## (二)創新教學模式再修正

本研究之創新教學模式是由兩位老師分別進行(四年1班和四年3班)，我們互相觀課之後，在數學社群討論時間提出分享與再修正。例如：三上第五單元除法，除了要小朋友學會三位數除一位數的除法，也希望小朋友會利用乘法及加法來「驗算」，反之亦然。此單元教學之後，學生在習作的表現並不理想(圖1)，他們並不清楚「被除數」、「除數」、「商」和「餘數」之間的關係。



圖1

於是我們利用計畫裡的創新的教學模式，也就「佈題→引導觀察→臆測或猜想→描述看到的規律→試驗→發現規則→一般化(推廣應用)」的方式引導小朋友學會「驗算」。首先佈題，題目如下(圖2)：

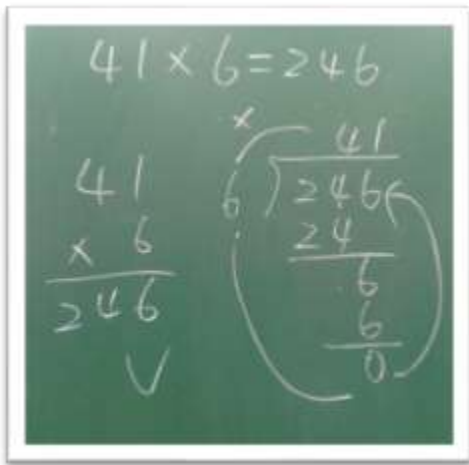


圖 2

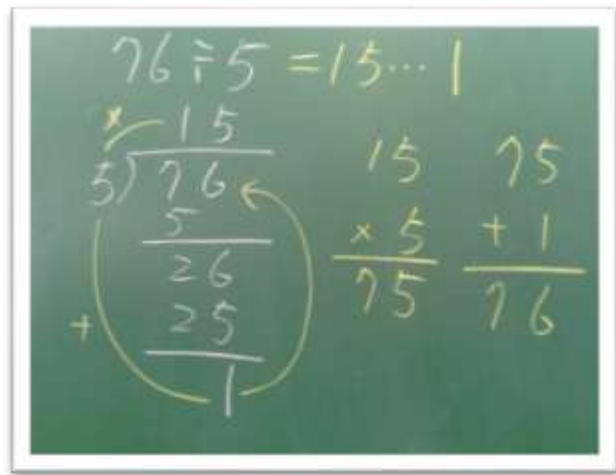
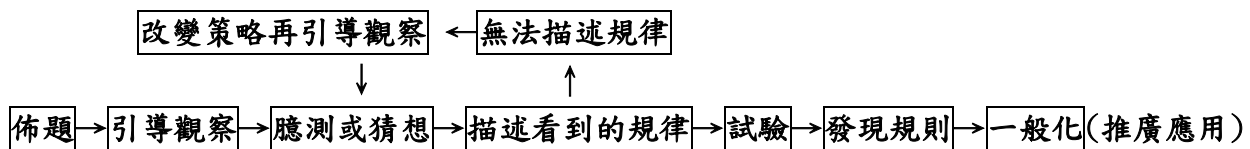


圖 3

「 $41 \times 6 = ?$ ，請用直式計算並寫出驗算。」學生大部分都會按照題意寫出正確答案。但要引導他們觀察並且猜想其中的規律時，就有超過一半的學生說不出其中的道理，他們只會模仿算則，乘法用除法和加法驗算或除法用乘法和加法驗算。當學生無法描述出看到的規律時，老師必須採取適當的策略再引導觀察，所以原來的教學模式必須在學生無法描述看到的規律時，再介入引導才行。

本例題介入的策略是「畫圖再引導觀察」，畫出箭號，並且提問。問小朋友「 $41 \times 6 = ?$ 」乘的結果(積)在除法運算裡是什麼?(當作被除數)，然後除數是原來的什麼?(乘數)，最後除的結果(商)是原來乘法算式的什麼?(被乘數)，接著再問「 $41 \times 6 = 246$ 」可以透過什麼方式驗算?小朋友回答:「除回去!」接著再引導小朋友觀察直式除法算式中的箭號所指的方向， $41 \times 6 + 0 = 246$ ，以檢驗乘的結果是否正確。然後請小朋友再依照箭號所指的方向和運算符號說說看它們的關係(描述看到的規律)。並且以此作為除法驗算的基礎。經過幾次練習驗算(圖3)之後，箭號所指的方向引導小朋友發現驗算的規律並且思考出乘除互為逆運算的關係。因此，比較適當的創新教學模式應該是：



#### 四、數學學習態度及成效

##### (一)數學學習態度

103 學年度下學期，我們分別在 2 月 26 日及 5 月 30 日分別對 140 名學生進行數學學習態度前、後測。測驗內容分五部分：例如 A. 對數學學習的感受是否有困難(6 題)、B. 學習數學是否會試著想辦法理解或問別人(5 題)、C. 學習數學很重要，生活中用得到(4 題)、D. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候，是當做題目愈做愈有自信時(4 題)、E. 我願意參與數學課，因為數學內容有趣、有挑戰性(4 題)。經過前、後測 t-test 統計結果顯示(表 1)，這些學生數學學習態度有顯著改善 ( $t = 2.1061, p < .05$ )。若 A~E 這五項的平均數來看，後測分別都高於前測，也顯示受試者在接受本計畫創新教材教法的研究之後，對於數學學習的感受和態度普遍都是積極正面的。

表 1 數學學習態度問卷結果相依樣本 t-test 摘要表

		A	B	C	D	E	t 值	p 值
前測	M	17.25	16.21	15	15.12	14.21	2.1061*	.0452
	SD	1.8	2.2	2.2	2.3	2.7		
後測	M	19.34	18.03	15.28	16.55	14.76		
	SD	2.1	2.7	2.5	2.6	3		
N=140								

\*  $p < .05$

##### (二)數學學習成效

參與本研究的 140 名學生之中，他們的數學學業成績有好有壞，但本研究更重視的是能否把低成就的學生也帶上來。因此從這些研究對象中取 103 學年度上學期數學成績全班最後 1/4 共 56 名作為評估對象，讓他們在 2015 年 6 月初接受本校輔導處的安排，分別連上教育部補救教學科技化評量網站進行測驗，測驗的內容是 3~4 年級程度的數學概念，最後結果雖然還有 5 名不及格(佔 8%)，但數學學習成效仍令人滿意。下圖為四年 3 班 8 名受測者全部及格報告表(表 2)。

表 2 補救教學科技化評量報告表

201506測驗結果報告

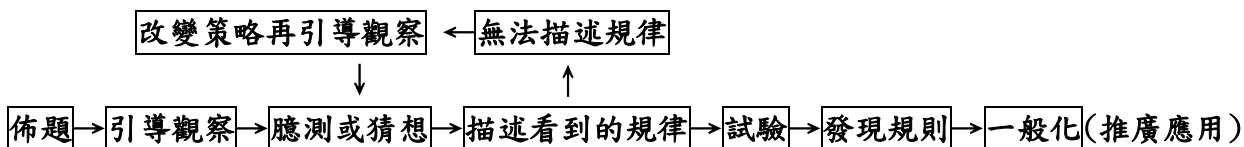
三科 國語文 數學 英語 施測後回構訊息											
No.	入學年度	班級	姓名	國語文		數學		英語		列印測驗報告	下載
				分數	是否合格	分數	是否合格	分數	是否合格		
1	100	3	馬 輝 *****7768	--	未測考	>=60	合格	--	未測考		
2	100	3	陳 宏 *****70653	>=60	合格	>=60	合格	--	未測考		
3	100	3	游 欣 *****61763	--	未測考	>=60	合格	--	未測考		
4	100	3	許 麗 *****24957	--	未測考	>=60	合格	--	未測考		
5	100	3	蘇 軒 *****05676	>=60	合格	>=60	合格	--	未測考		
6	100	3	吳 宏 *****69237	>=60	合格	>=60	合格	--	未測考		
7	100	3	張 維 *****79891	>=60	合格	>=60	合格	--	未測考		
8	100	3	王 登 *****88940	>=60	合格	>=60	合格	--	未測考		

## 肆、研究結論

### 一、已開發的創新教學素材

本研究已開發創新教教材，包括「尋找數的規律」(2 件)、「尋找形的規律」(1 件)、「尋找數形規律」(2 件)及「尋找數形情境規律」(1 件)。

### 二、尋找數學規律之創新教學模式



### 三、數學學習態度及成效

#### (一)數學學習態度

受試者在接受本計畫創新教材教法的研究之後，對於數學學習的感受和態度普遍都是積極正面的改善。

#### (二)數學學習成效

參與本研究的 140 名學生之中，低成就的學生經教育部補救教學科技化評量網站測驗，雖然還有 5 名不及格(佔 8%)，但數學學習成效仍令人滿意。

## 參考文獻

- 林保平(2007)。二位數乘法的速算—交乘簡化原則。科學教育月刊, 300, 32-37。
- 洪明賢(2003): 國中生覺察數形規律的現象初探。國立台灣師範大學數學系教學碩士論文, 未出版, 臺北市。
- 教育部(2003): 國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域。台北: 教育部。
- 曾志華(2006)。教師亟待學習的評量專業: 以 MiC「型與符號」的評量為例。台灣數學教師(電子)期刊, 第8期, 頁11-20。
- 郭國清(2006): 以八十二年國小數學課程的精神對國小五年級學童實施小班數型規律單元教學級學童學習歷程之研究。國立臺南大學應用數學研究所碩士論文, 未出版, 臺南市。
- 國民小學數學(第六冊)3下第四單元面積:「切割和拼湊」, pp. 46-48。南一書局, 2014。
- 國民小學數學(第八冊)4下第三單元「周長和面積」, pp. 25-36。康軒文教事業, 2014。
- 第四十六屆中小學科展 正方形寶寶面積長大的新方法。  
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/elementary/0804/080416.pdf>
- 黃敏晃(2000): 規律的尋求。台北市: 心理出版社。
- 鄭毓信、李國偉(1999)。數學哲學中的革命。台北市: 九章。
- 曹亮吉(2003)。阿草的數學聖杯。台北市: 天下遠見出版社。
- Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 263-343. New York, NY: Academic Press, ISBN 978-0124442207.
- Mathematic in Context(1997). *Patterns and Symbols: Teacher Guide*, p. 117. Encyclopedia. Britannica Educational Corporation.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The principles and standards from Mathematics*. Reston, VA: NCTM.



附件：已開發創新教材

## 尋找數的規律(一)

目標：尋找計算的規律、察覺尋找規律的優點

單元活動：三上認識 10000 以內的數

相對應能力指標：

1-n-07 能進行2個一數、5個一數、10個一數等活動。

C-C-06 能用一般語言及數學語言說明解題的過程

節數:1 節(40 分鐘)

小朋友！在你學完三上數學第一單元認識 10000 以內的數，我們一起來玩玩看下面的問題，並且找出規律。

1.  $3+4+5+6=$

2.  $5+6+7+8=$

3.  $7+8+9+10=$

4.  $12+13+14+15=$

5.  $21+22+23+24=$

問題: (1)有沒有更快的方法?

(2)你找到什麼規律?

(3)找到規律有什麼優點?

## 尋找數的規律(二)

目標：尋找計算的規律、察覺尋找規律的優點


單元活動：三上 五 除法(三位數除以一位數的除法)

相對應能力指標：

C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。

C-C-04 能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。

節數:1 節(40 分鐘)



練習五

● 填填看看：

① $4 \div 2 = ( \quad )$	② $18 \div 6 = ( \quad )$
$40 \div 2 = ( \quad )$	$180 \div 6 = ( \quad )$
$400 \div 2 = ( \quad )$	
-----	
③ $5 \div 7 = ( \quad ) \dots ( \quad )$	
$50 \div 7 = ( \quad ) \dots ( \quad )$	
$500 \div 7 = ( \quad ) \dots ( \quad )$	

問題：第③題繼續除， $5000 \div 7$ 、 $50000 \div 7$ 、 $500000 \div 7 \dots$ 在商和餘數，分別可以發現什麼規律？跟老師一起試試看。

## 尋找形的規律(一)

目標：尋找圖形規律及性質、認識正方形

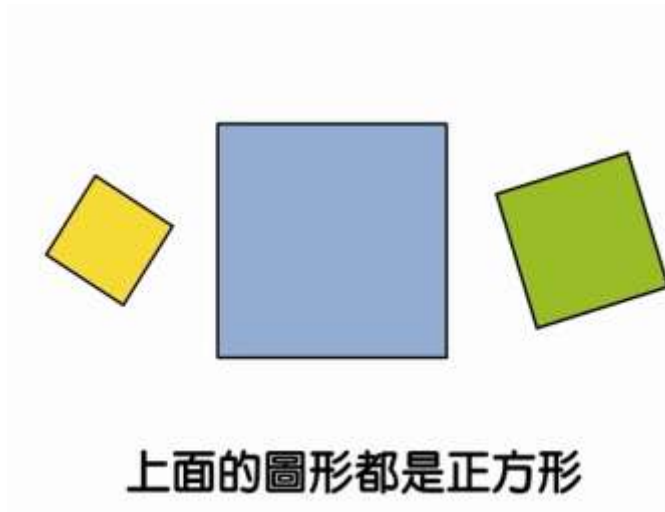
單元活動：三上 4-4 認識正方形

相對應能力指標：

1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。

C-S-03 能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。

節數:1 節(40 分鐘)



- (1) 妳發現了什麼？寫下來。
- (2) 大家輪流說說看，你發現了什麼？
- (3) 統整：正方形的四個邊如何？四個角如何？

## 尋找數形的規律(一)

目標：能察覺旋轉角的旋轉程度和角度的關係，且用量角器測量；認識順時針與逆時針方向旋轉的旋轉角。

單元活動：四上 三 認識角度

相對應能力指標：

4-n-14 能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度與畫出指定的角

4-s-05 能理解旋轉角的意義

C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。

C-R-02 能察覺數學與其他學習領域之間有所連結。

C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。

節數:1 節(40 分鐘)



圖(1)



圖(2)



圖(3)

問題：

- (一) 上面照片中的植物叫「珍珠一串紅」。請妳仔細觀察，說說看觀察到什麼？
- (二) 照片中「珍珠一串紅」每一片葉子有什麼變化？
- (三) 使用量角器量量看，每片葉子旋轉的角度，並記錄下來。
- (四) 從你記錄的角度變化，看出什麼規律？

## 尋找數形的規律(二)

目標：尋找計算正方形的規律

單元活動：四下 三 周長與面積

相對應能力指標：

3-s-06 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。

4-n-17 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並做相關計算。

C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。

C-T-02 能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出。

C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵。

C-S-03 能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。

節數:4 節(160 分鐘)

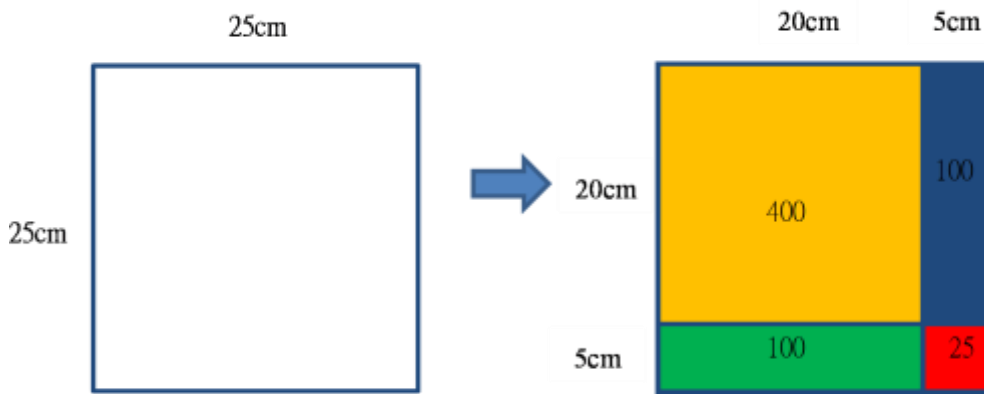


圖 1

圖 2

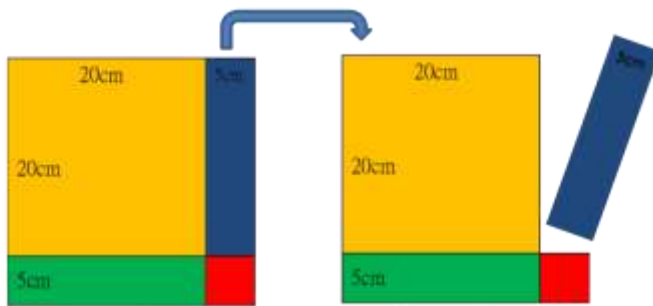


圖 3

圖 4

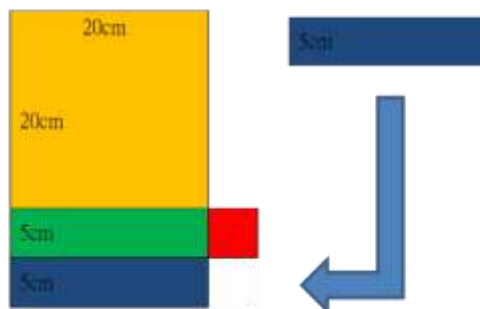


圖 5

問題：

(一)上面圖(1) 每邊長 25 公分的正方形，老師計算面積的計算方式如下：

步驟一：列出算式  $25 \times 25 = ?$

步驟二：個位和個位先乘  $\rightarrow 5 \times 5 = 25$

步驟三：第一項數字(25)的十位數取 20，第二項數字(25)十位數取 20

再加 10 等於 30，兩者相乘  $20 \times 30 = 600$

步驟四： $25 + 600 = 625$

步驟五：寫答  $\rightarrow$  答: 625 平方公分

(一)請應用老師的規律計算： $15 \times 15 = ?$  及  $45 \times 45 = ?$  的正方形面積。

妳發現了什麼？，寫下來。

(二)老師的規律能不能應用在計算個位數不是 5 的正方形面積上？用

老師的規律再試試看： $14 \times 14 = ?$  及  $23 \times 23 = ?$ 。

(三)老師的規律不能用時，根據圖(3)~圖(5)，修改老師的規律。

(四)試驗看看新的規律是否能夠計算個位數不是 5 的兩位數乘以兩位

數的正方形面積。

## 尋找情境的規律(一)

目標：尋找情境中解題的規律

單元活動：三下 三 日的加減計算

相對應能力指標：

3-n-11 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並作時或分同單位時間量的加減計算。

C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。

C-T-02 能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出。

C-S-02 能選擇使用合適的數學表徵。

C-S-03 能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。

節數:1 節(40 分鐘)

**3-4 日的加減計算**

**1** 小強全家從 6 月 3 日到 6 月 12 日去旅行。他們不在家的期間，要停送羊奶。共要停送幾天？

日 一 二 三 四 五 六  
 6 月  
 1 2 3 4 5 6 7  
 8 9 10 11 12 13 14  
 15 16 17 18 19 20 21  
 22 23 24 25 26 27 28  
 29 30

$12 - 3 = 9$   
 $9 + 1 = 10$

6 月 3 日是第一天，  
 6 月 12 日是最後一天， $12 - 3 = 9$ 。  
 ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦  
 ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫  
 第一天被減掉了，要再加 1 天。

我：用點數的，  
 3-4……12，共是 10 天。

答：10 天。

**2** 小梅從 4 月 5 日開始，出門旅遊 7 天。她結束旅遊是在幾月幾日？

日 一 二 三 四 五 六  
 4 月  
 1 2 3 4 5  
 6 7 8 9 10 11 12  
 13 14 15 16 17 18 19  
 20 21 22 23 24 25 26  
 27 28 29 30

$7 - 1 = 6$   
 $5 + 6 = ( )$

4 月 5 日是第一天，  
 要算 1 天， $7 - 1 = 6$ ，  
 再加 6 天就是小梅結  
 果旅遊的日子。

我：用點數的，  
 5-6……11，  
 是 4 月 11 日。

答：\_\_\_\_\_ 月 \_\_\_\_\_ 日。

問題：

(一) 第一個問題情境，小強不在家共有幾天？所以要停送羊奶。把你的算法記錄下來。接著點數 6 月的月曆檢驗答案對不對。

(二) 第二個問題情境，不照課本的算法，按題目的意思列出算式，並且點數 4 月的月曆檢驗答案對不對。

$$5+7=12$$

$$12-1=11 \quad \text{答:4 月 11 日}$$

(三) 從第一個和第二個問題情境，妳發現了什麼？

(四) 把你發現的規律，應用在下列情境，試試看。



1. 媽媽到日本旅遊 5 天，預計 3 月 12 日結束旅程，媽媽是幾月幾日出發前往日本？
2. 3C 大賣場從 3 月 20 日開始舉辦特賣會 5 天，特賣會的最後一天是幾月幾日？
3. 工人從 5 月 12 日開始整修道路，到 5 月 21 日完成，工人整修道路共是幾天？
4. 從 12 月 5 日開始，爸爸要到高雄出差 14 天，爸爸出差的最後一天是在幾月幾日？